Fermat-féle széls?értéktétel -- Differenciálható függvény bels? pontbeli széls?értéke létezésének szükséges feltétele -- Ha *f* valós-valós függvény és *f* differenciálható az *u* int Dom(*f*) pontban és *f*-nek *u*-ban lokális széls?értéke van, akkor

$f'(u) = 0,$

Tipikus átvitelielves tétel, hisz a "http://wiki.math.bme.huhatárérték"http://wiki.math.bme.hu létezését tudjuk, csak az értékét kell kiszámolnunk. Tegyük fel, hogy *u*-ban minimum van. Legyen ($_n$) az 0-hoz tartó pozitív sorozat, mely minden *n*-re $_n$ + u, u- $_n$ Dom(*f*). Ekkor

$$0 \leq f(u+\delta_n) - f(u) \text{ és } f(u-\delta_n) - f(u) \geq 0$$

Most az els?t osszuk le &deta;$_n$-nel, a másodikat -&deta;$_n$-nel. Ekkor:

$$0 \leq \frac{f(u+\delta_n) - f(u)}{\delta_n} \to f'(u) \text{ és } f'(u) \leftarrow \frac{f(u-\delta_n) - f(u)}{-\delta_n} \leq 0$$

S mivel, ha egy sorozat csupa nemnegatív (nempozitív), akkor a határértéke is ilyen, ezért:

$$0 \leq f'(u) \leq 0 \text{ azaz } f'(u) = 0$$

Tétel *Lagrange-féle középértéktétel* Legyen *f*: [*a*,*b*] $\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény. Ekkor létezik olyan (a,b), hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Ugyanis, Legyen

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Olyan *g* differenciálható függvény adunk meg, melynek pontosan olyan *x* helyen van nulla deriváltja, ahol f'(x)=m. Transzformáljuk el az *f* függvényt az l(x)=m(x-a) függvénnyel:

$$g(x) = f(x) - m(x-a) \qquad (x \in [a,b])$$

Ez a függvény egyrészt differenciálható, mert differenciálhatókból van összetéve az azt meg?rz? módon (speciel, ekkor folytonos is). Másrészt: g(a)=f(a)=g(b). Harmadrészt tetsz?leges *x* [a,b]-re

$$g'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = m$$

A továbbiakban belátjuk, hogy g-nek van az (a,b) nyílton széls?értéke.

g a Weierstrass-tétel miatt felveszi mindkét típusú extrémumát. Innen esetszétválasztással megyünk tovább.

1) Ha max(g)=f(a) és min(g)=f(a), akkor a függvény konstans, így minden pontja széls?érték.

2) Ha max(g) és min(g) közül bármelyik nem f(a), akkor ez a valamelyik nem lehet sem a-ban, sem b-ben, mert ott a függvényérték f(a), belül kell, hogy legyen ez a széls?érték.

Tehát az (a,b)-ben van széls?értékhely, mondjuk , amire a Fermat-féle széls?értéktételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$g'(\xi) = 0$$

tehát

$$f'(\xi) = m$$

QED

Feladat. Igazoljuk, hogy intervallumon differenciálható függvény pontosan akkor monoton, ha a deriváltja mindenhol vagy nemnegatív, vagy nempozitív.

Tétel. f:$I \longrightarrow$ **R** differenciálható. Ekkor a következ? két kijelentés ekvivalens egymással:

1. f monoton növekv?,
2. minden x I-re $f'(x) \geq 0$

Ugyanis, 1) $\longrightarrow$ 2) a < x I-re: a monotonitásból:

$$f(x) - f(a) \geq 0 \qquad / : (x-a)$$
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

x < a I-re: a monotonitásból:

$$f(a) - f(x) \geq 0 \qquad / : (a-x)$$
$$0 \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

azaz a különbségi-hányados függvény mindenütt nemnegatív (amit úgy nevezünk, hogy a függvény az *a*-ban lokálisan n?), azaz ennek határértéke sem lehet negatív. 2) $\longrightarrow$ 1) minden a < b I-re:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \geq 0 \qquad / \cdot (b-a)$$
$$f(b) - f(a) \geq 0$$

azaz f monoton n?.

Tétel. f:$I \longrightarrow$ **R** differenciálható. Ha minden x I-re $f'(x) > 0f$, akkor f szigorúan monoton növekv?.

Ugyanis, inden a < b I-re:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > 0 \qquad / \cdot (b-a)$$

$f(b) - f(a) > 0$

azaz *f* szigorúan monoton n?.

Feladat. Igaz-e?

1. Ha f monoton n?, akkor f' nemnegatív.
2. Ha f monoton n?, és mindenhol differenciálható, akkor f' nemnegatív.
3. Ha f mindenhol differenciálható és f' mindenhol nemnegatív, akkor f monoton n?.
4. Ha f intervallumon differenciálható és szigorúan monoton n?, akkor f' pozitív.

Megoldás.

1. Ha úgy értjük, hogy mindenhol diffható és f' nemnegatív, akkor nem ha úgy, hogy csak ahol f' létezik, akkor igaz.
2. Igen, mert ekkor lokálisan is monoton n?.
3. Nem, f(x)=-1/x deriváltja mindenhol létezik, mindenhol nemnegatív és mégsem monoton n? (csak intervallumonként n?)
4. Nem, f(x)=x^3 szig. mon n?, de 0-ban a derivált 0.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha x > 0, akkor f(x) = ln(1+x)-x+1/2x^2 > 0!

Megoldás. Mivel 0-ban folytonosan kiterjeszthet?, ezért ha a kiterjesztés szigorúan monoton növekv? lenne, akkor fennállna a kijelentés. Ehhez az kell, hogy a derivált (0,+)-en pozitív legyen:

$$\frac{1}{1+x}-1+x>0$$

A baloldali függvény negativitására abból következtethetünk, hogy szigorúan monoton növekv? a folytonos kiterjesztése (ami létezik, 0-ban 1), amihez az kell, hogy a deriváltja (0,+)-en pozitív legyen:

$$-\frac{1}{(1+x)^2}+1>0$$

ami fennáll, hiszen ez pont azt mondja, hogy

$$1>\frac{1}{(1+x)^2}$$

azaz

$$1 < (1+x)^2$$

Láttuk a monotonitás differenciális jellemzését:

$$\begin{array}{ll} f\in \mathrm{Diff}(I): & f\in \mathrm{M}^{\leq} \;\Leftrightarrow\; f'\geq 0 \\ f\in \mathrm{Diff}(I): & f\in \mathrm{M}^{\geq} \;\Leftrightarrow\; f'\leq 0 \end{array}$$

A széls?értékre és annak jellegére az els? deriváltból a következ? módon következtethetünk:

Tétel. -- Els?derivált próba -- Legyen az *f* (a,b) $\longrightarrow$ **R** differenciálható az (a,u)U(u,b) halmazon és folytonos u-ban. Ekkor:

1. ha f' < 0 (a,u)-n és f' > 0 (u,b)-n, akkor u-ban minimum van,
2. ha f' > 0 (a,u)-n és f' < 0 (u,b)-n, akkor u-ban maximum van,
3. ha azonos el?jel? mindenhol, akkor biztosan nincs széls?érték
4. ellenkez? esetben a próba nem ját sikerrel.

Világos, hogy ehhez kell a monotonitási vizsgálat.

A második derivált vizsgálata A görbületre vonatkozó differenciális feltétel:

$$f \in \mathrm{Diff}^2(I): \qquad f \in \mathrm{Konv} \Leftrightarrow f'' \geq 0$$
$$f \in \mathrm{Diff}^2(I): \qquad f \in \mathrm{Konk} \Leftrightarrow f'' \leq 0$$

A széls?értékkel analóg fogalom itt az *inflexiós pont*, mely eleve a differenciális feltétellel definiált: azt mondjuk, hogy az *u* I pont inflexiós pontja az $f \in \mathrm{Diff}^2(I)$ függvénynek, ha abban a pontban a második derivált el?jelet vált.

Érdemes még megjegyezni a széls?értékre vonatkozó másodikderivált próbát, mely lokális abban az értelemben, hogy pusztán csak a második derivált pontbeli értéke a dönt?:

Tétel. -- Másodikderivált próba -- Legyen $f \in \mathrm{C}^2(I)$ olyan, hogy az *u* int(I) pontban f'(u)=0. Ekkor

- ha f''(u) > 0, akkor *u*-ban f-nek *u*-ban lokális minimuma van,
- ha f''(u) < 0, akkor *u*-ban f-nek *u*-ban lokális minimuma van,
- más esetekben a próba nem jár sikerrel.

A tétel így, azaz a kétszeri folytonos differenciálhatóság megkövetelésével kimondva világos. Az els? esetben *u* egy környezetében f'' pozitív, azaz f' szig. mon. n?, azaz a f' el?jelet vált, így az els? derivált próba szerint ott széls?értéke van (éspedig minimum). A másik eset analóg ezzel.

Tétel - *Fermat-féle széls?értéktétel* - Legyen *f*: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\!\to$ **R**, *u* int Dom(*f*), *f* parciálisan differenciálható *u*-ban.

Ha *u*-ban *f*-nek (lokális) széls?értéke van, akkor

$$\mathrm{grad}\, f(u) = 0_{\mathbf{R}^n}$$

U.is: minden *i*-re az *i*-edik parciális függvénynek széls?értéke van u_i-ben, így az egyváltozós Fermat-tétel miatt ezeknek a deriváltja u_i-ben 0, így a gradiens értéke 0.

Másodikderivált-próba Kétszer differenciálható függvényre vonatkozóan megfogalmazhatjuk a lokális maximum és minimum létezésének elégséges feltételét. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy grad *f*(u) = 0 és $H^f(u)$ az *f* Hesse-mátrixa

1. ha det $H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) < 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **maximuma** van
2. ha det $H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) > 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **minimuma** van
3. ha det $H^f(u) < 0$, akkor *f*-nek biztosan nincs széls?értéke, ún. **nyeregpont**ja van
4. ha det $H^f(u) = 0$, akkor a próba nem járt sikerrel, azaz további vizsgálatokat igényel annak eldöntése, hogy *u* széls?érték hely-e.