

Tartalomjegyzék

- 1 Határozott integrál
 - ◆ 1.1 Definíció szerinti példák
 - ◆ 1.2 A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele
 - ◆ 1.3 A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma
 - ◆ 1.4 Az határozott integrál néhány tulajdonsága
 - ◆ 1.5 Az integrálfüggvény néhány tulajdonsága
 - ◇ 1.5.1 Az integrálfüggvény differenciálhatóságáról
 - ◇ 1.5.2 Az integrálfüggvény Lipschitz-tulajdonsága
 - ◇ 1.5.3 Példák
- 2 Primitívfüggvények

Határozott integrál

Az egyváltozós analízis történetileg kialakult két jellegzetes témaköre közül az egyik az érint?probléma (lényegében a differenciálelmélet) a másik a területszámítás problémája, vagy régies elnevezéssel a kvadratura-feladat (ami lényegében az integrálelmélet). Most a kvadratura, azaz a függvénygörbe alatti terület definícióját adjuk meg. Ehhez azonban néhány segédfogalmat kell megismernünk.

Az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum egy **Riemann-felosztásán** nem másrt értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely az $[a, b]$ -t unióként el?állító, egymásba nem nyúló intervallumokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elemben lév? elemet rendel, azaz egy olyan

$$\eta : \{[x_0, x_1], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]\} \rightarrow [a, b]$$

függvényt, melyre:

1. n olyan véges természetes szám, hogy $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ és
2. minden $J \in \text{Dom}(\eta)$ esetén $\eta(J) \in J$.

Az $[a, b]$ összes **Riemann-felosztásai halmazát** $\text{RF}[a, b]$ jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes részintervallum hossza kisebb egy $\epsilon > 0$ pozitív számnál, azt $\text{RF}_\epsilon[a, b]$ jelöli, azt a halmazt az $[a, b]$ összes **ϵ -nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezzük.

Egy f , az $[a, b]$ -n értelmezett függvény egy **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i]) \cdot |x_i - x_{i-1}|)$$

ahol η a fenti jelölésekkel az $[a, b]$ egy Riemann-felosztása.

Ekkor már definiálhatjuk az integrálhatóságot:

Definíció. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy zárt és korlátos intervallumon értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** és integrálja az I valós szám, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \eta \in \mathcal{RF}_\delta[a, b])(|\sigma_f(\eta) - I| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha f integrálható, akkor I egyértelmű és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$$\int_a^b f, \text{ vagy az } \int_a^b f(x) dx$$

szimbólum szolgál.

Az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát $\mathcal{R}[a, b]$ jelöli.

Az integrál lényegében a függvénygörbe alatti terület. Integrálható függvény esetén létezik ez a terület, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelítő összeg minden elírtre megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül I -hez.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden részintervallumán is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létező határértéket kapunk). Minthogy az integrál egy szám, integrálható f esetén értelmes ha definiáljuk a következőt, úgy nevezett **integrálfüggvényt** (vagy a -ban elírt n integrálfüggvényt):

$$\int f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \int_a^x f$$

Definíció szerinti példák

1. Példa. Jóformán az egyetlen függvény, aminek az integrálhatóságát a definíció alapján könnyen igazolni tudjuk, az a konstans függvény. Az $f(x) = c$ esetén a kiválasztott pontok mindig c függvényértékek, és az összes közelítő összeg mindig

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a) = \text{const.}$$

azaz

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

Már ezzel is azonban fel tudunk írni egy integrálfüggvényt: $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, f = c$ esetén:

$$(f_c)(x) = \int_{t=a}^x c dt = cx - ca$$

2. Példa. Nem minden függvény integrálható.

2. a. Zárjuk le a reciprok függvényt egy ponttal:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in (0, 1] \\ 1854, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(Riemann az 1854-es habilitációs dolgozatában definiálta és vizsgálta a most Riemann-integrálhatóságnak nevezett fogalmat, mindazonáltal az integrál első, a szigorúság követelményének eleget tév? definícióját Cauchy adta (1821) az intuitívét pedig Leibniz.) Ez a függvény nem integrálható, mert akármilyen finom intervallumfelosztás esetén, ha az első intervallumot hosszúra választjuk, definiálható egy $([x_0, x_1]) < \frac{1}{2}$ érték, azaz $f([x_0, x_1]) > 1/2$. Ekkor viszont az első téglalap területe $1/2$ lesz, ami $\rightarrow 0$ esetén a \pm -be tart, azaz az összterület nem lesz véges.

2. b. Legyen f a Dirichlet-függvény:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

ahol \mathbf{Q} a racionális számok halmaza, \mathbf{R} / \mathbf{Q} pedig nyilván az irracionális. Ez a függvény nem Riemann-integrálható, bár korlátos, mert akármilyen finom intervallum-felbontás esetén van egy olyan Riemann-kiválasztó függvény, mely mindig racionális pontokat választ ki és ezáltal a közelítő összeg mindig 1 és olyan, mely mindig irracionálist, azaz ezzel a közelítő összeg 0. Mindig lesz tehát két olyan felbontás, mely összegek különbsége legalább 1.

A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezelhető fogalom, a következő tétel bizonyításához azonban az egyváltozós analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvény. f pontosan akkor integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmértékű halmaz, azaz

$$f \in \mathbf{R}[a, b] \Leftrightarrow (f \in \mathbf{B}[a, b] \wedge m(\text{discon}(f)) = 0)$$

Itt Lebesgue-nullmértékűnek nevezünk egy $H \subset \mathbf{R}$ halmazt, ha minden $\epsilon > 0$ -hoz létezik olyan (I_n) intervallsorozat, hogy ennek összhossza $< \epsilon$ és lefedti H -t.

Biztos nem nullmértékű például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmértékű, mert lefedhető, egy határértékben elcsúszó intervallsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmértékű halmazt alkot. Konkrétan, könnyen belátható, hogy az $1/n$ pontjai nullmértékű halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény $[0, 1]$ -en mindenhol szakad, azaz $\text{discon}(\text{Dir}) = [0, 1]$, melynek a mértéke 1.

Példa. Felvetődik a kérdés: van-e konituum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenlő. A konstrukció a következő. Először definiáljuk az **ördög lépcsője** függvényt:

A $[0, 1]$ intervallumot osszuk 3 részre és vegyük ki a belső nyílt harmadot. Ezen a szakaszon legyen a függvény értéke $1/2$. Ismételjük a megmaradt két zárt intervallumra, és az érték legyen ott $1/4$ ill. $3/4$. A

fennmaradt részeket is osszuk, majd a középs? harmad értéke mindig a két széls? közepe legyen... Ha csak a bels? harmadokat vesszük, akkor ami megmarad a halmazból, az az úgy nevezett Cantor-halmaz. A Cantor-halmaz kontinuum számosságúan végtelen, de Lebesgue-nullmérték? -- ezt a két dolgot persze nem bizonyítjuk. A függvény mindenhol folytonos, a m.m- deriválható és a deriváltja 0 (de nem intervallumon értelmezett: Dom = [0,1] \ C). Ha most vesszük a deriváltfüggvényét és kiterjesztjük a C pontjaiban úgy, hogy ott 1 legyen az értéke, akkor ez egy kontinuum számosságú, de Lebesgue-nullmérték? halmazon szakadó, korlátos függvény, azaz integrálható. És az integrálja 0. Ebb?l is látható, hogy a fenti ekvivalenciatétel csodálatosan oldja meg, hogy bár a Riemann-felosztás véges, kontinuum számosságú, L-0-m. résszel is el tud bánni.

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételb?l.

1. $f \in R[a, b] \Rightarrow f \in B[a, b]$
csak korlátos függvények R-integrálhatóak
2. $f \in R[a, b] \Leftarrow f \in C[a, b]$
(Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt
3. $f \in R[a, b] \Leftarrow f \in M[a, b]$
monoton függvény R-integrálható (minden feltétel nélkül), amiatt a nem említett tétel miatt, hogy intervallumon értelmezett, monoton függvénynek csak megszámlálható szakadási pontja van, korlátos és zárt intervallumon pedig egy ilyen függvény korlátos.

Feladat. Integrálhatóak-e az alábbi függvények és ha igen, mi az integráljuk?

1.

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Igen, mert folytonos (illetve legfeljebb csak 1 ponton szakad, miközben korlátos). Ezen kívül páratlan: $-x \sin(1/x) = -|x| \sin(1/x)$, emiatt az origóra szimmetrikus intervallumon az integrálja:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

2.

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2^{i+1}}, & \text{ha } \frac{1}{2^{i+1}} < x \leq \frac{1}{2^i} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Igen, mert monoton. Az integrálját elegend? egyetlen végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó közelít? összegsorozat határértékeként számolni, hiszen ha ez nem konvergálna, akkor nem teljesülne a definícióban megkövetelt határérték létezése. Az intervallumot 2^m részre osztjuk fel. Ekkor az összeg:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{4^k} = -1 - \frac{1}{4^m} + \sum_{k=0}^m \frac{1}{4^k}$$

Ennek a határértéke a mértani sor összegképlete miatt:

$$\int_0^1 f(x) dx = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

3.

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1 + \sin(\frac{1}{x})}, & \text{ha } x \neq \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, 0 \\ 0, & \text{ha } x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, 0 \end{cases}$$

Megszámlálható sok szakadása van ugyan a függvénynek, de nem korlátosan a szakadások, így a függvény nem integrálható:

$$\nexists \int_0^1 f(x) dx$$

Az határozott integrál néhány tulajdonsága

A következőkben feltesszük, hogy az f és g a formulákban szereplő intervallumokat tartalmazó valamely intervallumon Riemann-integrálható.

1. Intervallum szerinti additivitás:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

2. Integrandus szerinti additivitás:

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + g$$

3. Integrandus szerinti monotonitás.

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. Integrandus szerinti homogenitás:

$$c \cdot \int_a^b f = \int_a^b cf \quad (c \in \mathbf{R})$$

5. Abszolút becslés.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

6. Triviális alsó és felső becslés.

$$(\inf f) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq (\sup f) \cdot (b - a)$$

7. Eltolásinvariancia.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Az integrálfüggvény néhány tulajdonsága

Az integrálfüggvény viselkedését vizsgálva meglepő következtetésre juthatunk.

Példa. Vegyük az alábbi lépcsős függvényt:

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1) \\ 2, & \text{ha } x \in [1, 2] \end{cases}$$

írjuk fel az integrálfüggvényét tudva-tudván, hogy az nem más mint a területfüggvény:

$$T(x) = \begin{cases} x \cdot 1, & \text{ha } x \in [0, 1) \\ 1 + 2(x - 1), & \text{ha } x \in [1, 2] \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1) \\ 2x - 1, & \text{ha } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Ábrázolva, azt kapjuk, hogy T képe egy törött vonal, **folytonos** és mindenhol, ahol nem törik, a **deriváltja az integrandus**. T diff.-ható a $[0,1) \cup [1,2]$ halmazon és

$$T' = f|_{[0,1) \cup [1,2]}$$

Az integrálfüggvény differenciálhatóságáról

Az integrandus folytonossági helyein az integrálfüggvény valóban differenciálható. Az alábbi tételt az analízis első alaptételének szokás nevezni.

Tétel. -- A kalkulus fundamentális tétele I. -- Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrálható. Ha f folytonos az $u \in [a, b]$ pontban, akkor f differenciálható u -ban és

$$\left(\int f \right)'(u) = f(u)$$

Bizonyítás. f folytonos u -ban, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f|_{B_\delta(u)} \in B_\varepsilon(f(u))$, azaz:

$$f(u) - \varepsilon \leq \inf f|_{B_\delta(u)} \leq \sup f|_{B_\delta(u)} \leq f(u) + \varepsilon$$

Írjuk fel a deriváltra a különbségi hányadost! Legyen x, y olyan, hogy az u sugarú környezetébe esik. Ekkor az integrál intervallum szerinti additivitása miatt:

$$\frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} = \frac{\int_x^y f}{y-x}$$

Ha most a triviális alsó és felső becslést vesszük:

$$f(u) - \varepsilon \leq \inf f|_{[x,y]} = \frac{\inf f|_{[x,y]} \cdot (y-x)}{y-x} \leq \frac{\int_x^y f}{y-x} \leq \frac{\sup f|_{[x,y]} \cdot (y-x)}{y-x} \leq \sup f|_{[x,y]} \leq$$

s mivel tetszőleges volt, ezért $f(u)$ nem más, mint az integrálfüggvény u -beli különbségi hányadosának határértéke (az $x=u$ helyettesítéssel). QED

Látható, hogy a bizonyításban többet láttunk be. Egyfajta u körüli "http://wiki.math.bme.hu/egyenletes-differenciálhatóság" http://wiki.math.bme.hu, az úgy nevezett erős differenciálhatóságot. Ez azért lehet fontos, mert ha az integrálfüggvény deriváltja nem nulla, akkor nem csak f , de az inverze is Lipschitz-folytonos, amiből pedig az következik, hogy mind az f , mind az inverze nullmértékbe képez.

Az integrálfüggvény Lipschitz-tulajdonsága

És persze az integrálfüggvény "http://wiki.math.bme.hu/hunagyon" http://wiki.math.bme.hu folytonos, egészen pontosan Lipschitz-tulajdonságú vagy más néven Lipschitz-folytonos, azaz

létezik olyan L nemnegatív szám, hogy minden $x, y \in [a, b]$ -re

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$$

azaz létezik olyan L , hogy minden $x, y \in [a, b]$ -re

$$\left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| \leq L|y - x|$$

Ugyanis a triviális felső becslésből:

$$\left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| \leq \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \sup |f| |_{[x,y]} \cdot |y - x| \leq \sup |f| \cdot |y - x|$$

ahol L -nek alkalmas a $\sup |f|$ szám.

A Lipschitz-tulajdonság és folytonosság kapcsolatáról lásd még [itt].

Példák

$$\left(\int_0^x \sin t \, dt \right)' (x) = ?$$

$$\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3} \, dt \right)' (x) = ?$$

Vizsgáljuk meg növekedés szempontjából az

$$[0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$$

szinusz integrálsz függvényt!

Primitívfüggvények

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvénynek primitív függvénye az $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény, ha $F' = f$.

Világos, hogy ha F primitív függvénye f -nek, akkor akármilyen konstans C -vel $F + C$ is primitív függvénye f -nek, hisz $(F + C)' = F' = f$. Ennél több is igaz. Ha f -nek primitívfüggvénye F , akkor f összes primitívfüggvénye $F + C$ alakú, ahol C tetszőleges valós szám. Ez az alábbi fontos tétel közvetlen következménye:

Tétel. Ha az $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény olyan, hogy $F' = 0$, akkor létezik olyan C valós szám, hogy $F = C$.

Bizonyítás. Egyszerűen a Lagrange-tételt kell alkalmazni F egy tetszőleges $[a, x]$ -re történő levezetésére:

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(\xi) = 0$$

azaz

$$F(a) = F(x) \quad (x \in [a, b])$$

QED

Ha tehát egyáltalán van f -nek van primitív függvénye és F ilyen, akkor ezek halmaza:

$$\{F + C \mid C \in \mathbf{R}\}$$

Talán fellelősség, de a fenti tételt néha az integrálszámítás alaptételének nevezik. Ennek egy kiterjesztett formája azonban tényleg méltó erre a névre:

Tétel. Ha az $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény majdnem mindenhol differenciálható, ezekben a pontokban a derivált nulla és F Lipschitz-tulajdonságú, akkor F konstans.

Az alábbi tétel szerint, amit szintén joggal neveznek a kalkulus fundamentális tételének, ha egy integrálható függvénynek van primitív függvénye, akkor az integrálfüggvények és primitívfüggvények halmaza egybeesik, s?t:

Tétel. Newton--Leibniz-formula Legyen $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ integrálható és létezzen primitív függvénye. Ekkor f mindnen F primitív függvényére:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ez a kalkulus második fundamentális tétele. Érdeemes alaposan megvizsgálni a feltételeit, mert tanulságos példákra lelhetünk.

```

+++++
+ létezik primitív függvénye + Dir
+ +
+ +
+ g' * h' + R-integrálható *
+ * + *
+ * ##### + *
+ * # folytonos # + *
+ * # # + *
+ * ##### + Ent | [0,2] *
+ * + *
+ * + *
+++++*+++++
*
*
*
*****
    
```

A Dir Dirichlet-függvények nem léteznek primitívfüggvénye, mert ha lenne olyan függvény, aminek f a deriváltja lenne, akkor f , mint deriváltfüggvény nem lenne Darboux-tulajdonságú: két függvényértéke között nem mindent venne fel. Azt is megnéztük, hogy R-integrálja sincs. (Bár Lebesgue-integrálja 0.)

Az Ent egészrész függvény integrálható (egy korlátos és zárt intervallumon), mert monoton, de nincs primitív függvénye, mert derivált nem ugorhat.

Legyen $g : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$ a következ?:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g' -nek g primitívfüggvénye, de tudjuk, hogy g' -nek nem korlátos másodfajú szakadása van a 0-ban, így g' nem lehet integrálható.

Végül nézzünk példát olyan függvényre, mely nem folytonos, de értelmes rá a N--L-formula. Legyen $h : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$ a következ?:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g' -nek g primitívfüggvénye, és tudjuk, hogy g' korlátos és csak a 0-ban van egyetlen szakadása, így g' integrálható.

Megjegyezzük, hogy a görbe alatti területet nem véges összegekkel, hanem végtelen sorral közelít? Lebesgue-integrál olyan általános, hogy ilyen vagy még általánosabban definiált értelemben nem integrálható függvényt keresni már komoly matematikai/halmazelméleti kihívást jelent.

Newton?Leibniz-tétel. Legyen $f \in R[a,b]$ és létezzen f -nek primitív függvénye és pedig az F . Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás. Elegend? belátni, hogy ha A -val jelöljük az integrál értékét, akkor A minden számnál közelebb van az $F(b)-F(a)$ értékhez. Legyen $\varepsilon > 0$. Az integrálhatóság definíciójából tudjuk, hogy az ε számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\mathcal{R}F[a,b]$ felosztásra teljesül, hogy

$$\left| A - \sum_{I \in \text{Dom}(\eta)} f(\eta(I)) |I| \right| < \varepsilon$$

Tekintsünk egy δ -nál finomabb intervallumfelbontást:

$$\{[a, x_1], \dots, [x_{n-1}, b]\}$$

függvényt! Ekkor a részintervallumokra felírható a Lagrange-tétel és minden részintervallumra létezik olyan

$$\eta([x_{i-1}, x_i]) \in [x_{i-1}, x_i]$$

szám, hogy az alábbi teleszkopikus összeg el?áll integrálközelít? összeg alakjában:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F(b) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})) + \dots + (F(x_1) - F(a)) \\ &= F'(\eta([x_{n-1}, x_n]))(x_n - x_{n-1}) + \dots + F'(\eta([x_1, x_0]))(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

De az

$$[x_{i-1}, x_i] \mapsto \eta([x_{i-1}, x_i])$$

függvény egy δ -nál finomabb Riemann-közelít?összeg (hiszen a intervallumokat δ -nál rövidebbre választottuk), így ennek eltérése az integráltól kisebb mint ε :

$$\left| A - (F(b) - F(a)) \right| = \left| A - \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

azaz igazoltuk a N?L-formulát.

Az ábrán van egy különlegesen fontos eset. Amikor az integrandus folytonos, akkor a függvénynek biztosan létezik primitívfüggvénye. Ez annak a tételnek a duálisa, hogy folytonos függvény integrálható.

Tétel. $f \in C[a,b]$, akkor f -nek (biztosan) létezik primitívfüggvénye.

Ugyanis ekkor az integrálfüggvény minden pontban differenciálható, azaz az integrálfüggény primitívfüggvénye f -nek.

Jelölés. Ha f folytonos, akkor indokolt a primitív függvények összességét a

$$\int f(x) dx + C$$

alakban írni, ahol C tetszőleges szám.

Megjegyzés. Ha tehát az a kérdés, hogy melyek a primitív függvényei f -nek, akkor a válasz a fenti kifejezés, ahol a **határozatlan integrált** szimbolizáló tag általában egy konkrét függvény.