

Tartalomjegyzék

- 1 Impropius integrál
 - ◆ 1.1 Elemi példák
 - ◆ 1.2 Összetettebb példák
 - ◆ 1.3 Ekvikonvergenca-kritérium

Impropius integrál

Lásd például: elmélet és példák, megoldások De, ezek nagyon nehéz feladatok!

Definíció. Ha az $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ az I minden korlátos és zárt részintervallumán integrálható (jelben: $f \in R^{loc}(I)$), és az integrálfüggvényeinek létezik és véges a határértéke az I végpontjaiban, akkor azt mondjuk, hogy f **impropius integrálható I -n** és **impropius integrálja** az

$$\int_I f = \lim_{x \rightarrow \sup(I)} F(x) - \lim_{x \rightarrow \inf(I)} F(x)$$

számot értjük, ahol F az f egy tetszőleges integrálfüggvénye.

Elemi példák

1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

azaz nem konvergens.

2. Ellenben a

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r} dx \quad (r < 1)$$

már létezik, mert $F(x) = \frac{1}{-r+1} \frac{1}{x^{r-1}} = \frac{1}{-r+1} x^{1-r}$ ha $x \rightarrow 0$ esetén 0 -hoz tart, így pl.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$$

3. Hasonlóképpen

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

szintén konvergens.

Összetettebb példák

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctg^7 x}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \arctg^8 x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{8} \arctg^8 x = \frac{\pi}{16} - 0 = 0$$

Ekvikonvergencia-kritérium

Tétel. (Ekvikonvergencia-kritérium) Ha az $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ függvények lokálisan integrálhatók, u az I akármelyik végpontja (akár végtelen is) és létezik és pozitív a

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték, akkor f és g improprius integráljai egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergensek.

A fenti határértéket (tetsz?leges $u \in I$ -re) még így is szokás jelölni:

$$f(x) \sim_u g(x) \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R}^+$$

és azt mondják, hogy f az u körül úgy viselkedik, mint g .

Példák. 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg(x)}{x^2} dx$$

Mivel az \arctg határértéke a végtelenben $\pi/2$, ezért sejthet?, hogy a függvény improprius integrálhatóság szempontjából úgy viselkedik, mint az $1/x^2$. ezt a következ?kkel igazoljuk:

$$\lim_{+\infty} \frac{\arctg(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{+\infty} \arctg(x) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az integrál konvergens.

$$\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x^3}$$
$$\int_1^{\infty} \sin^3 \frac{1}{x}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$
$$\int_1^{+\infty} \operatorname{th}(x)$$

Alkalmazások, forgástest térfogata: *Lásd: [itt](#)*