

Tartalomjegyzék

- 1 Primitívfüggvény-keresés
 - ◆ 1.1 Alapintegrálra visszavezethet? integrálok
 - ◇ 1.1.1 Alapintegrálok kiszámítása táblázatból
 - ◇ 1.1.2 Alapintegrálok és eltolásinvariancia
 - ◇ 1.1.3 Lineáris argumentumú integrandus
 - ◇ 1.1.4 Polinom/lineáris alak
 - ◇ 1.1.5 Linearizáló formulák
 - ◆ 1.2 Helyettesítéses integrálás
 - ◇ 1.2.1 ...-alakú integrálok
 - ◇ 1.2.2 Integrálás a helyettesítés elvégzésével
 - ◆ 1.3 Parciális integrálás
 - ◇ 1.3.1 Polinom szor exp, trig, hip
 - ◇ 1.3.2 Rekurziós integrálok, formulák
 - ◇ 1.3.3 Inverzfüggvények integrálja

Primitívfüggvény-keresés

Primitívfüggvény-keresésnek két módszere van. Az egyik a **helyettesítéses integrálás**, a másik a **parciális integrálás**. Ezek el?tt azonban egy triviális módszer, a deriválási táblázat megfordítása és az integrál eltolásinvarianciájának felhasználása. (Esetleg a lineáris argumentumú alapintegrál kiszámítása.)

Alapintegrálra visszavezethet? integrálok

Ha tehát vesszük az elemi függvények és inverzeinek deriválási táblázatát, akkor jobbról balra olvasva megkapjuk az **alapintegrálok** táblázatát.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (x \in \mathbb{R}^+, -1 \neq \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a \in \mathbb{R}^+) \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \cos x dx &= \sin x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C & (k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}) \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C & (\frac{k\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}) \\
\int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx &= -\operatorname{cth} x + C & (0 \neq x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx &= \operatorname{th} x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C & = \begin{cases} \operatorname{ar} \operatorname{th} x + C & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{ar} \operatorname{ch} x + C & (1 < |x| \in \mathbb{R}) \end{cases} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arc} \sin x + C & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \operatorname{ar} \operatorname{sh} x + C & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C = \begin{cases} \operatorname{ar} \operatorname{ch} x + C & (1 < x \in \mathbb{R}) \\ -\operatorname{ar} \operatorname{ch}(-x) + C & (1 > x \in \mathbb{R}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Alapintegrálok kiszámítása táblázatból

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

vagy a legkönnyebben elronthatók:

$$\int 5 \, dx = 5x + C$$

$$\int 0 \, dx = C$$

Alapintegrálok és eltolásinvariancia

Az integrál **eltolásinvarianciáját** használva:

$$\int \frac{1}{x+8} \, dx = \ln|x+8| + C$$

Lineáris argumentumú integrandus

A **lineáris argumentumúakra** vonatkozó képlet:

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

ahol $F'=f$. Hiszen az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = \frac{1}{a} \cdot f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

Ezzel pl:

$$\int \sin(5x-7) \, dx = -\frac{1}{5} \cos(5x-7) + C$$

Megjegyzés. Érdekes fejünkbe vésni a sin függvény deriváltjainak függvénysorozatát:

sin
 cos
 - sin
 - cos
 sin
 cos
 ⋮

felfelé haladva integrálunk, lefelé haladva deriválunk.

pl.

$$\int e^{(2008x-2007)} \, dx = \frac{1}{2008}e^{(2008x-2007)} + C$$

Polinom/lineáris alak

$$\int \frac{x-3}{x+1} dx = \int \frac{x+1-4}{x+1} dx = \int 1 - \frac{4}{x+1} dx = x - 4 \ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x+2} dx = \int \frac{2(x+2)-3}{x+2} dx = \int 2 - \frac{3}{x+2} dx = 2x - 3 \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{x^2+2}{x-1} dx = ?$$

itt már érdemes polinomosztással eljárni:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 2) : (x - 1) = x + 1 \\ - \quad x^2 - x \\ \hline \quad x + 2 \\ - \quad x - 1 \\ \hline \quad \quad 3 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+2}{x-1} dx = \int x + 1 + \frac{3}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x-1| + C$$

Néha $x^2 + 1$ nevezőjére is működik:

$$\int \frac{x^2-7}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-8}{x^2+1} dx = \int 1 - \frac{8}{x^2+1} dx = x - 8 \operatorname{arctg} x + C$$

Linearizáló formulák

Ezek arra alkalmasak, hogy a \sin^2 , \cos^2 , sh^2 , ch^2 függvényeket (illetve alkalmasan megváltoztatott argumentumú változatukat) ki lehessen integrálni:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}$$

Mindezek a következők miatt állnak fenn:

$$\begin{aligned} \cos^2 + \sin^2 &= 1 \\ \cos^2 - \sin^2 &= \cos(2x) \end{aligned}$$

ezért ezeket kivonva ill. összeadva, majd 2-vel elosztva a felső kettőt kapjuk. A másik kettő:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 &= 1 \\ \operatorname{ch}^2 + \operatorname{sh}^2 &= \operatorname{ch}(2x) \end{aligned}$$

Itt érdemes megjegyezni az **Osborne-szabályt**: ha egy trigonometrikus azonosságban kicseréljük a megfelelő hiperbolikus függvényekre az összetevőket és minden olyan tag előjelét megváltoztatjuk, melyek két sh szorzatából állnak (speciálisan a sh^2 -ek elé egy - jelet teszünk), akkor megkapjuk a hiperbolikus azonosságot. Lásd: Osborne-szabály.

Ezek főleg határozott integráloknál adnak "http://wiki.math.bme.huszép" http://wiki.math.bme.hu eredményt

Példa.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Helyettesítéses integrálás

Az első keresési eljárás az összetett függvény deriválási szabályának megfordításán alapul.

Tétel. Legyen $g: I \rightarrow J$, $F: J \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények és $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ pedig olyan, hogy az $F' = f$, akkor az $x \mapsto f(g(x)) \cdot g'(x)$ -nek is létezik primitív függvénye és

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Bizonyítás. A primitív függvény létezését az garantálja, hogy az integrandus folytonos.

Elegendő ellenőrizni, hogy $x \mapsto F(g(x))$ primitív függvénye $x \mapsto f(g(x)) \cdot g'(x)$ -nek, azaz az előbbi deriváltja az utóbbi:

$$F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

QED.

...-alakú integrálok

Ebből a tételből származtathatjuk a "http://wiki.math.bme.hu... alakú integrálokat" http://wiki.math.bme.hu:

1. $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ ($g(x) = ax + b$ esete)
2. $\int g^n(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$ ($f(\cdot) = (\cdot)^n$ esete $n \neq -1$)
3. $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$ ($f(\cdot) = \ln(\cdot)$ esete)

Példák.

$$1. \int \frac{x}{\cos^2(x^2 + 5)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 5)} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 5) + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.hukuls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\cdot) = \frac{1}{\cos^2(\cdot)} \quad \rightarrow_f \quad F(\cdot) = \operatorname{tg}(\cdot)$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = x^2 + 5 \quad \rightarrow' \quad g'(x) = 2x$$

2.

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg\,} x}{x^2 + 1} dx = \int (\operatorname{arc\,tg\,} x)^1 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2} + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.hukuls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\cdot) = (\cdot)^1 \quad \rightarrow_f \quad F(\cdot) = \frac{(\cdot)^2}{2}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \operatorname{arc\,tg\,} x \quad \rightarrow' \quad g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

3.

$$\int \frac{1}{(\operatorname{arc\,sin\,} x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,sin\,} x} dx = \ln |\operatorname{arc\,sin\,} x| + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.hukuls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\cdot) = (\cdot)^{-1} \quad \rightarrow_f \quad F(\cdot) = \ln |\cdot|$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \operatorname{arc\,sin\,} x \quad \rightarrow' \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.

$$\int x^{2008} \sqrt[2008]{\operatorname{sh} x^3} \cdot \operatorname{ch}(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \sqrt[2008]{\operatorname{sh} x^3} \cdot (3x^2 \operatorname{ch}(x^3)) dx = \frac{2008}{3 \cdot 2009} (\operatorname{sh} x^3)^{\frac{2009}{2008}} + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.hukuls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\cdot) = (\cdot)^{\frac{1}{2008}} \quad \rightarrow \int \quad F(\cdot) = \frac{2008}{2009} (\cdot)^{\frac{2009}{2008}}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \operatorname{sh}(x^3) \quad \rightarrow' \quad g'(x) = 3x^2 \operatorname{ch}(x^3)$$

Integrálás a helyettesítés elvégzésével

Megjegyzés. Intermezzóként megemlítjük, hogy a helyettesítés elnevezés abból fakad, hogy ekkor lényegében új ismeretlent vezetünk be. Persze az ezzel való számolás egy egészen más szemléletet igényel. A f? képlet ekkor:

$$\int g(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=u(x)} = F(u) + C \Big|_{u=u(x)}$$

ahol el kell végezni az

$$\begin{aligned} u = u(x) &\quad \rightarrow (\cdot)^{-1} & x = x(u) \\ \frac{du}{dx} = u'(x) &\quad \rightarrow & dx = \frac{du}{u'(x(u))} \end{aligned}$$

szimbolikus helyettesítést.

5. (exponenciális helyettesítés)

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = ?$$

$$\begin{aligned} u = e^x &\quad \rightarrow (\cdot)^{-1} & x = \ln u \\ \frac{du}{dx} = e^x = u &\quad \rightarrow & dx = \frac{du}{u} \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{u} du \Big|_{u=e^x} = \operatorname{arc\,tg}(u) + C \Big|_{u=e^x} = \operatorname{arc\,tg}(e^x) + C$$

5. (gyökös helyettesítés)

$$\int \frac{2x}{1 + \sqrt{x}} dx = ?$$

$$\begin{aligned} u = \sqrt{x} &\quad \rightarrow (\cdot)^{-1} & x = u^2 \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u} &\quad \rightarrow & dx = 2u du \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2u^2}{1+u} \frac{1}{2u} du = \int \frac{u}{1+u} du =$$

$$\int \frac{u+1-1}{1+u} du = \int 1 - \frac{1}{1+u} du = u - \ln|1+u| + C \Big|_{u=\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \ln \sqrt{x} + C$$

6. (trigonometrikus helyettesítés)

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

$$\frac{u}{\frac{du}{dx}} = \frac{\arccos x}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \xrightarrow{(\cdot)^{-1}} x = \cos u \rightarrow dx = -\sin u du$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\cos^2 u} (-\sin u) du = -\int \sin^2 u du =$$

$$-\int \frac{1-\cos(2u)}{2} du = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) + C \Big|_{u=\arccos x} = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{4}\sin(2\arccos x)$$

Parciális integrálás

A helyettesítéssel integrálás a függvénykompozíció deriválására szolgáló képlet felhasználása volt primitívfüggvény keresésre. Most a szorzási szabályt fogjuk használni.

Tétel. Legyen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos és $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható olyan, hogy $F' = f$, $G' = g$. Ekkor az alábbi képletben szereplő összes integrandusnak létezik primitív függvénye és

$$\int Fg = FG - \int fG$$

Bizonyítás. Elég a bizonyítani, hogy a jobb oldal deriváltja a baloldali integrandus. Ehelyett egy kicsit másként csináljuk: belátjuk, hogy az FG függvény primitívfüggvénye az $fG + Fg$ függvénynek, majd kifejezzük vele a fenti formula baloldalát:

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

tehát

$$FG = \int fG + Fg = \int fG + \int Fg$$

amiből már következik a fenti formula. QED.

Polinom szor exp, trig, hip

Az első alkalmazás az, amikor a egymás után parciális integrálásokkal polinommentes formulává alakítjuk az integrandust. Ekkor a fenti képlet F-je a polinom, amiből egyel alacsonyabb fokú polinomszoros integrandus keletkezik az fG integrál esetén.

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Hiszen

$$\begin{aligned} F = \text{id} & \quad \rightarrow' & f = F' = 1 \\ g = \sin & \quad \rightarrow^{\int} & G = \int g = -\cos \end{aligned}$$

Egy hasonló:

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) \text{sh}(3x - 2) \, dx &= (2x + 1) \frac{1}{3} \text{ch}(3x - 2) - \int 2 \cdot \frac{1}{3} \text{ch}(3x - 2) \, dx = \\ &= \frac{2x + 1}{3} \text{ch}(3x - 2) - \frac{2}{9} \text{sh}(3x - 2) \end{aligned}$$

Hiszen

$$\begin{aligned} F = 2\text{id} + 1 & \quad \rightarrow' & f = F' = 2 \\ g = \text{sh} \circ (3\text{id} - 2) & \quad \rightarrow^{\int} & G = \int g = \frac{1}{3} \text{ch} \circ (3\text{id} - 2) \end{aligned}$$

Rekurziós integrálok, formulák

1.

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

az

$$\begin{aligned} F = \ln & \quad \rightarrow' & f = F' = \frac{1}{\text{id}} \\ g = \frac{1}{\text{id}} & \quad \rightarrow^{\int} & G = \int g = \ln \end{aligned}$$

szereposztással. A formulában visszatért a keresett integrál, így ezt kifejezve:

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

2.

$$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \cos(x) \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x) \cdot e^x dx$$

amib?!

$$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \frac{1}{2}(\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x) + C =$$

tehát kétszeri parciális integrálással értük el.

3. Rekurziós formulát kapunk az alábbi I_n alakú integrálokra:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^n} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx$$

az utolsó tagot parciálisan integráljuk ki:

$$= \frac{1}{2} \int x \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{1}{(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)}$$

azaz I_n kifejezhető I_{n-1} -segítségével.**Inverzfüggvények integrálja**

Az

$$\int f^{-1} = \int f^{-1} \cdot 1 = f^{-1} \cdot \text{id} - \int \text{id} \cdot (f^{-1})'$$

trükk sokszor alkalmas arra, hogy az inverz függvények integrálját parciálisan kiintegráljuk, hiszen az inverz függvények deriváltjának képlete az utolsó tényezőt a kezünkre játssza. Speciálisan a módszer alkalmas az összes \ln , \arcsin és \arccos függvény kiintegrálására.

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) dx &= \int \arcsin(x) \cdot 1 dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \cdot \arcsin(x) + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$