

A $T = J_1 \times J_2$ korlátos és zárt téglalap egy **Riemann-felosztásán** nem másrt értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely a T -t unióként elállító, egymásba nem nyúló tengelyekkel márhzuzamos oldalú téglalapokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elembe lév? elemet rendel, azaz egy olyan függvényt, melyre:

1. $\text{Dom}(\eta)$ minden I eleme tengelyekkel párhuzamos oldalú zárt téglalap, melyek egymásba nem nyúlnak, uniójuk T
2. minden $I \in \text{Dom}(\eta)$ esetén $\eta(I) \in I$.

A T összes **Riemann-felosztásai halmazát** $\text{RF}(T)$ jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes elem területe (oldalhosszainak szorzata) kisebb egy $\delta > 0$ pozitív számnál, $\text{RF}_\delta(T)$ jelöli, ezt a halmazt a T összes **δ -nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezzük.

Egy f , az T -n értelmezett és $\mathbb{R}$ -be képez? függvény egy η felosztáshoz tartozó **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{I \in \text{Dom}(\eta)} f(\eta(I)) \cdot |I|$$

Ekkor már definiálhatjuk az Riemann-integrálhatóságot:

Definíció. Legyen $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ egy zárt és korlátos téglán értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** és integrálja az A valós szám, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \eta \in \text{RF}_\delta(T))(|\sigma_f(\eta) - A| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha f integrálható, akkor A egyértelmű és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$$\int_T f, \text{ vagy az } \int_{T_{x,y}} f(x, y) \, dx dy$$

szimbólum szolgál.

A T téglalapon Riemann-integrálható függvények halmazát $\text{R}(T)$ jelöli.

Az integrál lényegében a függvény grafikonja alatti térfogat. Integrálható függvény esetén létezik ez a térfogat, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelít? összeg minden el?re megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül A -hoz.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden résztégláján is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létezik határértéket kapunk).

Egy kompakt K halmazon értelmezett f függvény integrálja nem más, mint tetszőleges a K -t tartalmazó T téglá esetén az

$$\hat{f} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in T \setminus K \\ f(x), & \text{ha } x \in K \end{cases}$$

függvény integrálja T -n, ha ez létezik.

Tartalomjegyzék

- 1 A Riemann-inTEGRÁLHATÓSÁG szükséges és elégséges feltétele
- 2 A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma
- 3 Kétváltozós függvény integráljának kiszámítása
- 4 Paraméteres integrál integrálhatóságának kritériuma

A Riemann-inTEGRÁLHATÓSÁG szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezelhető fogalom, a következő tétel bizonyításához azonban a klasszikus analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen $f: T \rightarrow \mathbf{R}$ korlátos és zárt téglán értelmezett függvény. f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmértékű halmaz, azaz

$$f \in R(T) \Leftrightarrow (f \in B(T) \wedge m(\text{discon}(f)) = 0)$$

Itt Lebesgue-nullmértékűnek nevezünk egy $H \subset \mathbf{R}^N$ halmazt, ha minden $\epsilon > 0$ -hoz létezik olyan (I_n) téglasorozat, hogy ennek összterfogata $< \epsilon$ és lefedi H -t.

Biztos nem nullmértékű például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmértékű, mert lefedhető, egy határértékben elterjedt intervallumsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmértékű halmazt alkot. Konkrétan, könnyen belátható, hogy az $1/n$ pontjai nullmértékű halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény $[0,1]$ -en mindenhol szakad, azaz $\text{discon}(\text{Dir})=[0,1]$, melynek a mértéke 1.

Példa. Felvetődik a kérdés: van-e konitnuum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenlő. (Lásd: az **ördög lépcsője** függvényt)

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételből.

1. $f \in R(T) \Rightarrow f \in B(T)$
csak korlátos függvények R-integrálhatóak
2. $f \in R(T) \Leftarrow f \in C(T)$
(Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt

Kétváltozós függvény integráljának kiszámítása

Ha $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbf{R}$ integrálható, akkor

1.
$$F(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$
2. minden x -re a
$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{[a,b] \times [c,d]} f$$
 függvény is integrálható és

Ugyanis, ha ekkor f korlátos, és L - 0 -mértékű a szakadásainak halmaza. Emiatt az $f(x, \cdot)$ függvények is ilyenek, melyek integrálja folytonos a $[c, d]$ intervallumon, amiből korlátos is, tehát integrálható.

Másrészt,

Paraméteres integrál integrálhatóságának kritériuma

Legyen $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos. Ekkor az

$$F(y) = \int_{x=a}^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

létezik mert az integrandusa folytonos. Mi több, maga is folytonos.

Ugyanis,

$$F(y) - F(y_0) = \int_{x=a}^b f(x, y) - f(x, y_0) dx$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik $\delta > 0$, hogy ha $|y - y_0| < \delta$, akkor

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Ekkor viszont

$$|F(y) - F(y_0)| \leq \int_{x=a}^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon$$

Tehát $F(y)$ folytonos (egyenletesen) és így integrálható egyváltozós függvény, azaz létezik:

$$A = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy$$

Ez alapot ad az integrál kiszámítására: az $f(x,y)$ kétváltozós függvény integrálja tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap alakú tartományon nem függ az integrálás sorrendjétől. Ezen esetben a $f(x,y)$ mindig konstansnak vesszük:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} f &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x,y) dy \right) dx = \\ &= \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x,y) dy dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x,y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Tétel. Ha $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, minden $y \in [c,d]$ -re $x \mapsto f(x,y)$ is integrálható és $F: y \mapsto \int_{x=a}^b f(x,y) dx$ is integrálható, akkor $\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_c^d F$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Legyen A olyan, hogy

$$\int_c^d F = A$$

Ekkor $\varepsilon/2$ -hez létezik olyan $\delta > 0$, hogy $[c,d]$ -nek minden δ -nál finomabb J Riemann-felosztására:

$$\left| \sum_J F(\eta_J) |J| - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De ekkor létezik a $\varepsilon/2(d-c)$ -hez és minden J -re olyan $\delta' > 0$, hogy $[a,b]$ -nek minden δ' -nél finomabb I Riemann-felosztására:

$$\left| \sum_I f(\xi_I, \eta_J) |I| - F(\eta_J) \right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

Viszont ekkor

$$\left| \sum_I \sum_J f(\xi_I, \eta_J) |J| |I| - \sum_J F(\eta_J) |J| + \sum_J F(\eta_J) |J| - A \right| = \left| \sum_J \left(\sum_I f(\xi_I, \eta_J) |I| - F(\eta_J) \right) |J| \right|$$