Szerkeszt?:Mozo/A2_szigorlat_17

Lásd err?l még Serény jegyzetének (ps.gz/dvi) 30., 34-35., 70-72. oldalán.

A **V** = $\mathbf{R}^2$-ben, vagy $\mathbf{R}^3$-ban olyan matematikai objektumokat hozunk létre, melyek **V** minden bázisában felírva egy-egy mátrixszal jellemezhet?k, de invariánsak a koordinátarendszer megváltoztatására nézve, azaz mátrixaik egymással vett szorzata (vagy összege, vagy vektorral, számmal vett szorzata) egyenl? a szorzat mátrixával. $\mathbf{R}^n$-ben ilyet könnyen találunk: ezek az L($\mathbf{R}^n$,$\mathbf{R}^n$)-beli lineáris operátorok:

Definíció. Az L($\mathbf{R}^n$,$\mathbf{R}^n$)-beli lineáris operátorokat tenzoroknak, vagy másodrend? tenzoroknak nevezzük.

Minthogy a tenzorok maguk is invariánsak, találhatunk velük kapcsolatos további vektor, tenzor vagy skalárinvariánsokat.

El?ször is megfogalmazzuk, hogy mit?l invariáns egy mennyiség. Legyen B és C az n dimenziós **V** egy-egy bázisa. Legyen **T** a B-t a C-re váltó koordinátaváltás transzformációja, azaz a

$$\mathbf{T}b_i = c_i \qquad (i = 1...n)$$

(tehát ez invertálható tenzor). Tudjuk hogy, ha **A** tetsz?leges tenzor, akkor ? egy lineáris leképezés, és emiatt

$$[\mathbf{A}]_C = [\mathbf{T}^{-1}]_B[\mathbf{A}]_B[\mathbf{T}]_B$$

Ez a tenzorok invariáns tulajdonsága.

Az f(*M*)   **R** (*M* $M^{n\times n}$) skalárfüggvényt akkor nevezzük **invariánsnak**, ha minden B és C bázisra és **A** tenzorra:

$$f([\mathbf{A}]_C) = f([\mathbf{A}]_B)$$

Másként, minden *B* bázisra, **T** a *B* megváltoztató koordinátaváltó transzformációra és **A** tenzorra

$$f([\mathbf{A}]) = f([\mathbf{T}^{-1}][\mathbf{A}][\mathbf{T}])$$

ahol [.] a B-beli koordinátamátrixot jelenti.

Az m(*M*) $M^{n\times n}$ (*M* $M^{n\times n}$) mátrixfüggvényt pedig akkor nevezzük **invariánsnak**, ha minden B és C bázisra és **A** tenzorra:

$$m([\mathbf{A}]_C) = [\mathbf{T}^{-1}]m([\mathbf{A}]_B)[\mathbf{T}])$$

azaz ha m az *A* mátrixával együtt transzformálódik.

Determináns

Vegyük az $M \longmapsto$ det(*M*) mátrixleképezést. A *determinánsok szorzástétele* szerint tetsz?leges *M* és *N* mátrixra:

$$\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N)$$

Emiatt ha *A* az **A** tenzor egy mátrixa és *T* a koordinátaváltó-mátrix, akkor:

$$\det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(A)\det(T) = \det(T^{-1})\det(T)\det(A) =$$

$$= \det(T^{-1}T)\det(A) = \det(I)\det(A) = 1\cdot\det(A) = \det(A)$$

Hiszen $T^{-1}T$ = I az egységmátrix.

Értelmes tehát az **A** tenzor determinánsának értelmezése úgy, hogy det(**A**) az **A** tetsz?leges mátrixának determinánsa.

Nyom, trace, spur

Vegyük a következ? mátrix leképezést:

$$\mathrm{Sp}:\ M\mapsto\sum_{i=1}^{n}M_{ii}$$

azaz a mátrixok f?átlóbeli elemeinek összegét. Ez is invariáns, melyet a következ?kkel bizonyíthatunk. El?ször is belátjuk a spur szimmetrikus tulajdonságát. Tetsz?leges *A*, *B* mátrixra Sp(AB) = Sp(BA). Tudjuk, hogy két mátrix szorzata a következ?képpen definiált:

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

ezért:

$$\mathrm{Sp}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}B_{ki}A_{ik}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk}=\mathrm{Sp}(BA)$$

Ez a képlet azt mondja, hogy "http://wiki.math.bme.huspur alatt a mátrixok kommutálnak"http://wiki.math.bme.hu. Az invariancia pedig:

$$\mathrm{Sp}(T^{-1}AT)=\mathrm{Sp}(T^{-1}TA)=\mathrm{Sp}(IA)=\mathrm{Sp}(A)$$

Ez a mennyiség tehát az **A** tenzor egy **skalárinvariáns**a.

Szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorok

Vegyük az **A** lineáris leképezést és ennek az S sztenderd bázisbeli mátrixát *A*-t. Ekkor világos, hogy az A^T transzponált mátrixszal történ? $A^T[\mathbf{v}]_S$ szorzás egy lineáris leképezés, tehát tenzor, tenzortranszponálás definíciója tehát az, hogy minden **A** tenzorhoz hozzárendeljük a következ? lineáris leképezést:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=[\mathbf{A}]_S^T\cdot[\mathbf{v}]_S$$

ahol · a mátrixszorzás.

Ám, ez nem minden bázisban viselkedik úgy, ahogy azt a transzponálástól elvárjuk, azaz ha B egy tetsz?leges bázis, akkor az $[\mathbf{A}]_B{}^T$ már nem feltétlejül a $T^{-1}\, A^T T$ mátrix, ahogy azt várnánk. Ellenben ortonormált bázisokra és a köztük váltó ortogonális transzformációkra már igen. Ezután a tárgyalást csak ortonormált (azaz páronként mer?leges, egységhosszúságú bázisvektorú) bázisokra és az ezek között váltó $O^T = O^{-1}$ egyenl?ségnek eleget tév? távolságtartó vagy másként ortogonális transzformációkra szorítkozunk.

Igaz az alábbi invariancia-tulajdonság. Ha B tetsz?leges ortonormált bázis, $[\mathbf{A}]_B = A$ és $O^T = O^{-1}$, akkor

$$(O^{-1}AO)^{\mathrm{T}} = O^{\mathrm{T}}(O^{-1}A)^{\mathrm{T}} = O^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(O^{-1})^{\mathrm{T}} = O^{-1}A^{\mathrm{T}}O$$

(Felhasználtuk a szorzat transzponálásának $(AB)^T = B^T A^T$ szabályát -- nemdebár a mátrixszorzás nem kommutatív.) Tehát a sztenderd bázisban definiált transzponálás minden ortonormált bázisban transzponálás lesz, így ha csak ezekre szorítkozunk, akkor a $\mathbf{A}^T$ fenti definíciója invariáns leképezést ad meg.

Lényeges tehát, hogy transzponálást, szimmetria és antiszimmetria vizsgálatokat a tenzorok tekintetében most úgy végezünk, hogy tudatában vagyunk annak, hogy eközben a hagyományos, geometriai $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$cos definíciójú skaláris szorzást használjuk (illetve ennek komponensenkénti változatát). Ezért nevezzük ezeket néha geometriai tenzoroknak.

Az **S** tenzor **szimmetrikus**, ha minden ortonormált bázisban a mátrixa szimmetrikus mátrix. Igaz az, hogy **S** pontosan akkor szimmetrikus, ha minden **u**, **v** vektorra

$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{Sv})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{Su})$,

ahol $\cdot$ a skaláris szorzás.

Az **A** tenzor **antiszimmetrikus**, ha minden ortonormált bázisban a mátrixa antiszimmetrikus mátrix. Igaz az, hogy **A** pontosan akkor antiszimmetrikus, ha minden **u**, **v** vektorra

$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{Av})=-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{Au})$,

ahol $\cdot$ a skaláris szorzás.

Bármely **T** tenzor egyértélm?en el?áll **S** + **A** alakban, ahol **S** szimmetrikus, **A** pedig antiszimmetrikus, éspedig:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}})$$

Két fontos tétel:

Tétel -- Ha **A** $\mathbf{R}^3$ (illetve $\mathbf{R}^2$) antiszimmetrikus, akkor létezik olyan **a** vektor (vagy *a* skalár), hogy minden **v** vektorra:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} \qquad (\text{vagy } \mathbf{Av} = a \cdot \mathrm{CROSS}(\mathbf{v}))$$

a-t (ill. *a*-t) az **A** **vektorinvariánsá**nak nevezzük (bár a síkon ez skalár). A tételt elég a sztenderd bázisban igazolni, ott az **a**×(.) opertátorral, azonos így **A** ez az operátor.

F?tengelyétel -- Ha **S** $\mathbf{R}^n$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós és létezik a sajátvektorokból álló B ortonormált bázis, amiben **S** f?tengelyre transzformálható, azaz diagonális és az elemei az **S** sajátértékei:

$$[\mathbf{S}]_{\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ez nehéz, de fontos tétel.