

Tétel ? Bolzano-tétel ? Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felve? folytonos függvénynek van zérushelye.

a Bolzano-tételt még oly módon is szokás kimondani, hogy

intervallumon értelmezett folytonos függvény két függvényértéke között minden értéket fölvesz

melyet Darboux-tulajdonságnak neveznek. A Bolzano-tétel lényegében azt mondja ki, hogy az intervallumon folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. Megjegyezzük, hogy a Darboux-tétel pedig azt mondja ki, hogy az intervallumon differenciálható függvények deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú.

Tétel ? Weierstrass-féle minimum-maximum-elv ? Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi abszolút minimumát és maximumát.

Az alábbiakban felhasználjuk a kompaktság fogalmát.

(*Kompakt* egy K halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerből, melynek uniója lefedi K -t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi K -t.)

Tétel (Weierstrass) Valós érték?, kompakt halmazon folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.

Azaz ha $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt és $f \in C(K, \mathbb{R})$, akkor $\sup(f), \inf(f) \in \text{Ran}(f)$

Bizonyítás. 1) Először belátjuk, hogy kompakt halmazon folytonos függvény korlátos. Legyen ugyanis az f értelmezési tartománya K . A folytonosság miatt K minden u eleméhez létezik $\delta(u)$ pozitív szám, hogy f a $B_\delta(u)$ környezeten belül mindvégig az $(f(u)-1, f(u)+1)$ intervallumon belül marad. Ekkor a nyílt halmazokból álló

$$\{B_{\delta(u)}(u)\}_{u \in K}$$

rendszer lefedi K -t, vagyis a Heine-Borel-tétel miatt már ebből véges sok is lefedi, azaz létezik $V \subset K$ véges, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{u \in V} B_{\delta_u}(u)$$

Ezek képei lefedik $\text{Ran}(f)$ -et:

$$f(K) \subseteq \bigcup_{u \in V} f(B_{\delta_u}(u)) \subseteq \bigcup_{u \in V} \{B_1(f(u))\}$$

Ez utóbbi a folytonosság miatt, tehát f képét véges sok korlátos intervallum lefedi, azaz korlátos.

2) Belátjuk, hogy f felveszi a szuprémumát (és ugyanígy az infimumát is). Legyen $S := \sup(f)$ (azaz f értékkészletének legkisebb felső korlátja). Ekkor a $g : K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto S - f(x)$ függvény nemnegatív értékeket vesz föl. Ha f nem venné fel a szuprémumát, akkor g pozitív lenne. Ekkor értelmezhet? lenne a

$$h : K \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{S - f(x)}$$

függvény. h mert folytonos függvényekből van folytonosságot meg?rz? módon összetéve. Az 1) pont szerint korlátos is, ami azonban ellentmond annak, hogy S a szuprémum. Ugyanis $S = \sup \text{Ran}(f)$ azt jelenti, hogy minden $1/n$ alakú számra van $x_n \in K$, hogy $|S - f(x_n)| < 1/n$, azaz van olyan K -beli x_n sorozat, melynek képsorozata h által a végtelenbe tart, azaz h nem korlátos.

Tétel (Bolzano) Összefügg? halmaz folytonos képe összefügg?.

(Ha $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\text{Dom}(f)$ ívszer?en összefügg?, akkor $\text{Ran}(f)$ is ívszer?en összefügg?.)

Bizonyítás. Az ívszer? összefügg?ségből és a folytonos függvények kompozíciójára vonatkozó tételből.

Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbf{R} \supset \rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonos az értelmezési tartománya egy u pontjában, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))(|x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon)$$

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos

Legyen f egy az $A \subset \mathbf{R}$ halmazon értelmezett, $\mathbf{R}$ -be képez? függvény. Legyen $u \in \overline{A}$ az A torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f -nek a $v \in \mathbf{R}$ elem **határértéke** az u -ban, ha

minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in A \cap (u - \delta, u + \delta) \setminus \{u\}$ -re $f(x) \in B(u, \varepsilon)$

ahol természetesen a $+$ és $-$ környezetei a már említett módon értend?k.

Ebben az esetben a határérték egyértelm? és jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_u f = v$$

Folytonosság és határérték kapcsolata

A folytonosságot, csak az értelmezési tartomány pontjaiban nézhetünk, hisz a definícióban $f(u)$ is szerepel. Ellenben határértéket akár azon kívüli is nézhetünk (s?t!). Mégis, a két fogalom között szoros kapcsolat van:

1. Tétel. -- Folytonos függvény határértéke a helyettesítési értéke -- Legyen az u az f értelmezési tartományában. Ekkor a következ?k ekvivalensek egymással:

1. f folytonos u -ban
2. u izolált pontja $\text{Dom}(f)$ -nek, vagy u torlódási pontja $\text{Dom}(f)$ -nek, létezik u -an határértéke és $\lim_u f = f(u)$

2. Tétel. -- Véges helyen véges határérték? függvény folytonossá tehet? -- Legyen u a $\text{Dom}(f)$ véges torlódási pontja és v véges ($\mathbf{R}$ -beli) szám. Ekkor a következ?k ekvivalensek.

1. $\exists \lim_u f = v$
2. létezik az f -nek olyan $\bar{f}$ u -ban folytonos kiterjesztése (vagy módosítása), hogy $\bar{f}|_{\text{Dom}(f) \setminus \{u\}} = f|_{\text{Dom}(f) \setminus \{u\}}$ és $\bar{f}(u) = v$

Definíció Legyen $D \subset \mathbf{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}^M$, $A \subset \mathbf{R}^M$, $u \in \mathbf{R}^N$ torlódási pontja D -nek. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az u pontban az A , ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap B(u, \delta) \Rightarrow f(x) \in A$

Az, hogy a határérték az u -ban A azt jelenti, hogy a függvénynek folytonos kiterjesztése u -ban az $f(u) = A$

hozzárendelés.

Lényeges, hogy tudjuk annak jellemzését, hogy egy pontban a határérték nem létezik. Ehhez a Heine-féle határértékfogalmat használjuk:

Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^M$, $A \in \mathbb{R}^M$, $u \in \mathbb{R}^N$ torlódási pontja D -nek. Ekkor az alábbi két kijelentés ekvivalens egymással:

1. létezik $\lim_u f = A$,
2. $(\forall (a_n) \in \text{Dom}(f) \setminus \{u\}^{\mathbb{Z}^+})(a_n \rightarrow u \Rightarrow f(a_n) \rightarrow A)$

Ezzel megfogalmazhatjuk annak a feltételét, hogy nem létezik a határérték:

Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^M$, $A \in \mathbb{R}^M$, $u \in \mathbb{R}^N$ torlódási pontja D -nek. f -nek nincs határértéke u -ban, ha

létezik olyan $(a_n) \in \text{Dom}(f) \setminus \{u\}^{\mathbb{Z}^+}$ sorozat, hogy bár $a_n \rightarrow u$, de $(f(a_n))$ nem konvergens.