Inverzfüggvénytétel R-re

Inverzfüggvény deriváltja. Ha az *f* invertálható függvény differenciálható *u*-ban, f^{-1} folytonos *u*-ban és f'(u) ≠ 0, akkor az inverz is differenciálható *u*-ban és

$$(f^{-1})'(f(u)) = \frac{1}{f'(u)}$$

Megjegyzés. A tételi állításban az inverz folytonossági feltétele csak olyan esetben jelent megszorítást, amikor a függvény nem intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény. Példa olyan invertálható függvényre, melynek deriváltja nem nulla egy adott pontban, de inverze a képpontban nem folytonos:

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$$
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \notin \mathbf{Z}^+ \\ \frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x = n \in \mathbf{Z}^+ \end{cases}$$

f ekkor a 0-ban deriválható és *f* '(0)=1, invertálható, mert **R** \ (1/$\mathbf{Z}^+$) \ $\mathbf{Z}^+$-n az identitás és az $\mathbf{Z}^+$-n pedig az 1/id, mely értékei vétetnek fel az **R** \ (1/$\mathbf{Z}^+$)- halmaz képeiként. Viszont így f^1 nem korlátos 0-ban, azaz nem folytonos, így nem is differenciálható.

Állítás. Intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze folytonos (tehát ez esetben még akkor is folytonos az inverz, ha a függvénynek magának ugrása van).

Erre a meglep? eredményre egy illusztráló példát adunk.

Példa. Folytonosan invertálható-e az alábbi függvény? Indokoljuk a fenti tétel nélkül!

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ x^2 + 1, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

Megoldás. Persze, hisz a negatívokon invertálható és csak negatív értéket vesz fel. A pozitívokon szintén és szintén csak pozitív értékeket vesz fel. A 0-beli érték az el?z? képhalmazokon kívül esik (a 0). Az inverz:

$$\mathrm{Dom}\, f^{-1} = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y-1}, & \text{ha} \quad y < -1 \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0 \\ \sqrt{y-1}, & \text{ha} \quad y > 1 \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt folytonos, mert a gyök az, és a 0-ban izolált pontja van, ahol a függvények triviálisan folytonosak.

Tétel -- Globális inverzfüggvény-tétel -- Ha *f*: $I \longrightarrow$ **R** függvény folytonosan differenciálható és f' sehol se nulla, akkor

1. *f* invertálható
2. *f* inverze folytonos (*f* homeomorfizmus)

3. *f* inverze deriválható (*f* diffeomorfizmus)
4. minden x I-re

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Megjegyzés. Részletesebb indoklás azt is kimutatja, hogy a derivált folytonossága nem szükséges (bár nem árt :).

Bizonyítás. 1) A derivált mindenhol azonos el?jel?, ellenkez? esetben lenne két hely, ahol különböz?, de a Darboux-tétel miatt akkor lenne zérushelye is a deriváltnak, ami ellentmond a feltételeknek. Tehát *f* szigorúan monoton, így invertálható.

2) Minden *a* I pontban a derivált nem nulla és folytonos, így létezik olyan környezete, melyben a derivált mindenhol egy L pozitív számál nagyobb. Ezért a Lagrange-tétel miatt a környzet bármely két x_1, x_2 pontjára:

$$0 < L \leq f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Emiatt az $x=f^{-1}(y)$ áttéréssel:

$$L \leq |\frac{x_1 - x_2}{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}|$$

azaz

$$\frac{1}{L}|y_1 - y_2| \geq |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)w$$

azaz az inverz lipschitzes a környezetben, azaz a pontban folytonos. 3) 4) ezt egyszerre igazoljuk. Az *u*-beli diffhatóság miatt:

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(u) = f'(u)(x-u) + \varepsilon(x)(x-u) \\
&f(x) - f(u) = (f'(u) + \varepsilon(x))(x-u) \qquad (x = f^{-1}(y),\;\; u = f^{-1}(v)) \\
&y - v = (f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y)))(f^{-1}(y) - f^{-1}(v)) \\
&\frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))}(y-v) = f^{-1}(y) - f^{-1}(v) \\
&\frac{1}{f'(u)}(y-v) + \left(\frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)}\right)(y-v) = f^{-1}(y) - f^{-1}(v)
\end{aligned}$$

Itt az

$$\eta(y) = \frac{1}{f'(u) + \varepsilon(f^{-1}(y))} - \frac{1}{f'(u)}$$

függvény akkor lesz folytonos és *v*-ben elt?n?, ha maga f^{-1} is folytonos *v*-ben.

Példa. Igazoljuk, hogy létezik a sin inverze a [- /2, /2]-n és az inverz folytonos a [-1,1]-en (ez az arcsin) ezen kívül az inverz deriválható a bels? pontokban!

Ugyanis. [- /2, /2]-n a sin szigorúan monoton n? és inverz képe [-1,1]. Emiatt ez folytonos is és az inverzfüggvény-tétel miatt a nyílton differenciálható, ugyanis

$$\frac{1}{\sin'(x)}=\frac{1}{\cos(x)}>0,\quad \mathrm{ha}\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

az inverze:

$$(f^{-1})'(y)=(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\cos(\mathrm{arc}\ \sin(y))}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\mathrm{arc}\sin(y))}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Implicitfüggvény-tétel -- Ha a : $I\times J\longrightarrow$ **R** folytonosan differenciálható függvény az (x_0,y_0) int($I\times J$) pontban teljesíti a ∂ /∂y ≠ 0 feltételt, akkor a (x_0,y_0) pont egy környezetében egyértelm?en létezik az (x,y)= (x_0,y_0) egyenletnek az (x_0,y_0) ponton áthaladó implicit függvénye, azaz az x_0 egy K I környezetében értelmezett, J-beli érték? y deriválható függvény, melyre minden x K esetén:

$$\Phi(x,y(x))=\Phi(x_0,y_0),\ y(x_0)=y_0$$

és ennek deriváltja minden x K-ban:

$$y'(x)=-\left.\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}\right|_{(x,y(x))}$$

+ el?adásjegyzet