

1. (Lineáris helyettesítés) Mi az általános megoldása?

$$y' = \sqrt{y - 2x}$$

Mo. Legyen $u=y-2x$, ekkor $du=dy-2dx$, azaz

$$u' = y' - 2$$

Innen:

$$\begin{aligned} u' + 2 &= \sqrt{u} \\ \frac{du}{dx} &= 2 + \sqrt{u} \\ \frac{du}{2 + \sqrt{u}} &= dx \end{aligned}$$

A baloldalt gyökös helyettesítéssel integráljuk: $t^2 = u$, $du=2t \, dt$, azaz

$$\frac{2t \, dt}{2 + t} = 2 \frac{(t + 2 - 2) \, dt}{2 + t} = (2 - \frac{4}{2 + t}) \, dt$$

Innen:

$$2\sqrt{u} - 4\ln|2 + \sqrt{u}| = x + C, \text{ azaz}$$

ezt kell y -nal kifejezni.

2. (Kezdeti érték probléma) Oldjuk meg az

$$\sin y \, dy - x^2 \cos^4 y \, dx = 0$$

egyenletet az

$$\begin{aligned} \text{a) } y(0) &= -\frac{\pi}{2} \\ \text{b) } y(0) &= \frac{\pi}{4} \\ \text{c) } y(0) &= \frac{\pi}{4} + 2\pi \end{aligned}$$

kezdeti feltételekkel.

Mo. Nem egzakt, de valójában az egyenlet a

$$y' = x^2 \frac{\cos^4 y}{\sin y}$$

és ez szeparábilis. Sőt, egzakttá tehet? az $(1/\cos^4 y)$ integráló szorzóval.

a) Ez egy konstans megoldás ($y(x) = \sqrt{2}$) és nincs másik a $(0, \sqrt{2})$ -n áthaladó, mert az y szerinti parciális derivált korlátos.

b) Az általános megoldásból keressük a kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$\begin{aligned}\frac{\sin y}{\cos^4 y} y' &= x^2 \\ -\cos^{-4} y (-\sin y) y' &= x^2 \\ \frac{1}{3} \cos^{-3} y &= \frac{1}{3} x^3 + C\end{aligned}$$

Az implicit egyenlet:

$$\cos^{-3} y = x^3 + 3C$$

Ha $x=0$ és $y = \sqrt{2}/4$, akkor

$$3C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}$$

és

$$y(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + \frac{24}{(\sqrt{2})^3}}}$$

c) ugyanez + 2

HF. Oldjuk meg az $y' = \sin(x) \ln(y)$ egyenletet az

a) $y(0)=1$,

b) $y(0)=e$

kezdeti feltételek mellett!

3. (Állandó variálása)

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin(x^2)$$

4. (Kezdeti értékes állandóegyütthatós lineáris)

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad (y(0) = 1, y'(0) = -2)$$

5. (Rendszer)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 4x_2\end{aligned}$$

Mo. Ha a feladat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

alakú különböz? valós sajátértékekkel, és az A-nak λ_1, λ_2 -hoz tartozó sajátvektoraiból álló mátrix:

$$B = (s_1, s_2),$$

akkor a megoldás

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Itt a sajátértékefeladat megoldása:

$$(2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 3 = 0$$

azaz

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1; 5 \end{aligned}$$

6.

$$y^{(6)} + 4y^{(3)} + 3y = x^2$$

Mo.

Kar. egy:

$$\begin{aligned} \lambda^6 + 4\lambda^3 + 3 &= 0 \\ (\lambda^3)_{1,2}^3 &= -1; -3 \end{aligned}$$

-1, -3 háromszoros gyökök, tehát:

$$y_a = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 e^{-3x} + c_5 x e^{-3x} + c_6 x^2 e^{-3x}$$

A próbafüggvény: $y = Ax^2 + Bx + C$, tehát:

$$4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$$

azaz $A=1/4, B=C=0$.