

Tartalomjegyzék

- 1 Differenciálegyenletek
 - ◆ 1.1 Fokszámban homogén egyenletek
 - ◆ 1.2 Kezdetiérték feladat
 - ◆ 1.3 Egzaktra visszavezethet?
 - ◆ 1.4 Lineáris argumentumú egyenlet
 - ◆ 1.5 Függvényeggyütthatós lineáris egyenlet
 - ◆ 1.6 Laplace-transzformációval megoldható feladatok
 - ◆ 1.7 Próbafüggvény módszerrel megoldható egyenletek
- 2 Komplex függvénytan
 - ◆ 2.1 Folytonosság, határérték
 - ◆ 2.2 Deriválhatóság
 - ◆ 2.3 Elemi függvények
 - ◆ 2.4 Sorok
 - ◆ 2.5 Integrálás paraméterezéssel és Newton--Leibniz-formulával
 - ◆ 2.6 Integrálás Riemann-féle integráltétellel és Cauchy-féle integrálformulával
 - ◆ 2.7 Integrálás reziduúmtétellel
- 3 Vektoranalízis
 - ◆ 3.1 Differenciáloperátorok
 - ◆ 3.2 Potenciálkeresés
 - ◆ 3.3 Vonalintegrál
 - ◆ 3.4 Felületi integrál

Differenciálegyenletek

Fokszámban homogén egyenletek

$$1. \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}$$

MO. $u = y / x$; $y = ux$; $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{1}{u} + 2u$$

$$u'x = \frac{1 + u^2}{u}$$

$$\int \frac{u}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2u}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |1 + u^2| = \ln |x| + C \quad ; \quad (C \in \mathbf{R})$$

$$\ln |1 + u^2| = \ln c_1^2 x^2 \quad ; \quad (c_1 = \ln C)$$

$$1 + u^2 = cx^2 \quad ; \quad (c > 0)$$

Implicit mo.:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = cx^2$$

Explicit mo.:

$$y = x \cdot \left(\pm \sqrt{c} \sqrt{x^2 - \frac{1}{c}} \right)$$

Itt $|x| > \frac{1}{\sqrt{c}}$

2. $x^2 y' = xy + y^2$

MO. $y \neq 0$ konstans mo. $y=ux$ helyettesítéssel:

$$x^2(u'x + u) = ux^2 + u^2x^2$$

ahonnan intervallumon értelmezett megoldás esetén:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u + u^2 \\ u'x &= u^2 \\ \int \frac{du}{u^2} &= \int \frac{1}{x} dx \\ -\frac{1}{u} &= \ln|x| + C; (C \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Implicit mo.:

$$-x = y \ln c|x|; (c = \ln C) \text{ és } y \neq 0$$

Explicit mo.:

$$y = \frac{-x}{\ln c|x|} \text{ és } y \neq 0.$$

3. $x^2 y' = 2xy + y^2$

MO. $y \neq 0$ konstans mo. $y=ux$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} u'x + u &= 2u + u^2 \\ u'x &= u + u^2 \\ \int \frac{du}{u(u+1)} &= \int \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du &= \int \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$\ln |u| - \ln |u + 1| = \ln |x| + C; (C \in \mathbf{R})$$

$$\ln \left| \frac{u}{u+1} \right| = \ln c_1 |x|; (c_1 = \ln C)$$

$$\frac{u}{u+1} = c x; (c \in \mathbf{R})$$

Implicit mo.:

$$y = c(xy + x^2); (c \in \mathbf{R})$$

Explicit mo.:

$$y = \frac{cx^2}{1 + cx}; (c \in \mathbf{R})$$

Kezdetiérték feladat

1. $y' = e^{x-y}; (y(-1)=0)$

MO.

$$y' = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

Implicit ált. mo.:

$$e^y = e^x + C; (C \in \mathbf{R})$$

Explicit általános mo.:

$$y = \ln(e^x + C)$$

Behelyettesítve az implicit ált. mo-ba:

$$e^{-1} = 1 + C$$

$$C = \frac{1}{e} - 1$$

A kezdeti feltételt kielégít? mo.:

$$y = \ln\left(e^x + \frac{1}{e} - 1\right)$$

2. $y' = \frac{2xe^{x^2}}{y^5}; (y(0)=-1)$

MO.

$$\int y^5 dy = \int 2xe^{x^2} dx$$

Implicit ált. mo.:

$$\frac{y^6}{6} = e^{x^2} + C; (C \in \mathbf{R})$$

Explicit általános mo.:

$$y = \pm \sqrt[6]{6e^{x^2} + 6C}; (C \in \mathbf{R})$$

Behelyettesítve az implicit ált. mo-ba:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= 1 + C \\ C &= \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégít? mo.:

$$y = -\sqrt[6]{6e^{x^2} - 5}$$

Egzaktra visszavezethet?

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \quad ? = y \in C^1(I, J) \quad P, Q \in C^1(I \times J, \mathbf{R})$$

$$(Pdx + Qdy = 0)$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int R(x)dx}, & R(x) &= \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} \\ \mu(y) &= e^{-\int S(y)dy}, & S(y) &= \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{P} \end{aligned}$$

Majd $? = F \in C^1(I \times J, \mathbf{R})$

$$\begin{cases} \partial_x F = \mu P \\ \partial_y F = \mu Q \end{cases}$$

$$1. \frac{1}{x^4} - 3y^2 = xy y'$$

MO.:

Egzaktra visszavezethet?

$$\left(\frac{1}{x^4} - 3y^2\right) dx - xy dy = 0$$

$$\partial_y\left(\frac{1}{x^4} - 3y^2\right) - \partial_x(-xy) = -6y + y = -5y$$

$$R(x) = \frac{-5y}{-xy} = \frac{5}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{5}{x} dx} = e^{5 \ln |x|} = |x|^5$$

Tehát x^5 alkalmas integráló szorzó.

$$x - 3x^5y^2 - x^6yy' = 0$$

Innen az

$$(\partial_x F, \partial_y F) = (x - 3x^5y^2, -x^6y)$$

egy megoldását megkeresve:

$$F = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^6y^2 + C_1(y)$$

$$F = -\frac{1}{2}x^6y^2 + C_2(x)$$

ahonnan:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^6y^2$$

És az implicit általános megoldás:

$$x^2 - x^6y^2 = C ; (C \in \mathbf{R})$$

(Az explicit pedig:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 + C}{x^6}})$$

$$2. \quad 1 + (x - e^{-y})y' = 0$$

MO.:

$$1dx + (x - e^{-y})dy = 0$$

$$\partial_y 1 - \partial_x(x - e^{-y}) = -1$$

$$S(y) = -1$$

$$\mu(y) = e^{-\int -1 dy} = e^y$$

integráló szorzó.

Egzaktra visszavezethet?

$$e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0$$

$$(\partial_x F, \partial_y F) = (e^y, xe^y - 1)$$

egy megoldását megkeresve:

$$F = xe^y + C_1(y)$$

$$F = xe^y - y + C_2(x)$$

ahonnan:

$$F(x, y) = xe^y - y$$

És az implicit általános megoldás:

$$xe^y - y = C; (C \in \mathbf{R})$$

Lineáris argumentumú egyenlet

1. $y' = (4x - y)^2$

MO. $u=4x-y; u'=4-y'$

$$4 - u' = u^2$$

$$4 - u^2 = u'; \text{ konstans megoldások: } u = \pm 2$$

$$\int \frac{du}{4 - u^2} = \int 1 dx; (\text{ha } u \neq \pm 2)$$

$$-\int \frac{du}{(u-2)(u+2)} = \int 1 dx$$

$$-\int \frac{\frac{1}{4}}{u-2} - \frac{\frac{1}{4}}{u+2} du = \int 1 dx$$

$$-\frac{1}{4} \ln |u-2| + \frac{1}{4} \ln |u+2| = x + C$$

Implicit általános megoldás:

$$\sqrt[4]{\left| \frac{4x - y + 2}{4x - y - 2} \right|} = e^{x+C}$$

és az szeparálással ki nem hozható két megoldás: $y = 4x \pm 2$

2. $y' = \cos^2(x + y) - 1$

MO. $u=x+y; u'=1+y'$

$$u' - 1 = \cos^2(u) - 1; \text{ konstans megoldások: } u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 u} = \int 1 dx \quad ; \text{ (ha } u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{)}$$

$$\operatorname{tg}(u) = x + C$$

Implicit általános mo.:

$$\operatorname{tg}(x + y) = x + C \quad \text{és a szeparálással ki nem hozható megoldások: } y = -x + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Függvényegyütthetős lineáris egyenlet

$$y' + f(x)y = g(x) \quad ? = y \in C^1(I) \quad f, g \in C(I)$$

1.
$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

MO. I.) Homogén. y = 0 mo.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3}{x} dx =$$

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + C$$

$$y = cx^3$$

II.) Az inhomogén partikuláris megoldást

$$y = c(x)x^3$$

alakban keressük.

$$y' = c'x^3 + c3x^2$$

Behelyettesítés után:

$$c'x^3 + 3cx^2 - 3cx^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$c' = \frac{-1-2}{2} \frac{1}{x^3 \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$c = \frac{-1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

így az általános mo.:

$$y = cx^3 + \frac{-1}{2}x^3 \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

2. $y' + (\ln x^3)y = \ln x$

MO. I.) Homogén. $y = 0$ ($x > 0$) mo.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int -3 \ln x dx \\ \ln |y| &= -3(x + x \ln x) + C \\ y &= ce^{-3(x+x \ln x)} \end{aligned}$$

II.) Az inhomogén partikuláris megoldást

$$y = c(x)e^{-3(x+x \ln x)}$$

alakban keressük. Behelyettesítés után:

$$\begin{aligned} c'e^{-3(x+x \ln x)} + ce^{-3(x+x \ln x)}(-3 \ln x) + ce^{-3(x+x \ln x)} \ln x^3 &= \ln x \\ c' &= e^{3(x+x \ln x)} \ln x \\ c &= \frac{1}{3}e^{3(x+x \ln x)} \end{aligned}$$

így az általános mo.:

$$y = ce^{-3(x+x \ln x)} + \frac{1}{3}$$

Laplace-transzformációval megoldható feladatok

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} \\ \mathcal{L}\{af(t)\} &= a\mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &\mapsto sF(s) - f(0) \\ f''(t) &\mapsto s^2F(s) - sf'(0) - f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &\mapsto F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ f(t) = 1 &\mapsto F(s) = \frac{1}{s} \\ f(t) = t &\mapsto F(s) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$f(t) = t^n \mapsto F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(t) = \sin(\omega t) \mapsto F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \cos(\omega t) \mapsto F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

1. $x(0)=1$; $y(0)=-1$ **kezdeti feltétellel** oldja meg az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + 4y \\ \dot{y} &= 4x + 3y\end{aligned}$$

egyenletrendszert!

MO.

$$\begin{aligned}sX - 1 &= 3X + 4Y \\ sY + 1 &= 4X + 3Y\end{aligned}$$

Ebből kell kifejezni X-et és Y-t. Egyszerű a megoldás, ha észrevesszük, hogy ezeket összeadva:

$$\begin{aligned}s(X + Y) &= 7(X + Y) \\ (s - 7)(X + Y) &= 0\end{aligned}$$

ami minden s -re csak akkor teljesül, ha $X+Y=0$. (De egyenletrendezéssel is megy, ha az egyik egyenletről az s -sel meg nem szorozott változót kifejezzük és a másodikba helyettesítjük, pl. az elsőből az Y -t kifejezzük.) Innen pl. az első egyenletről:

$$\begin{aligned}sX - 1 &= -X \\ (s + 1)X &= 1 \\ X &= \frac{1}{s + 1}\end{aligned}$$

Ezt visszatranszformálva:

$$x = e^{-t}$$

És $y=-x$ miatt:

$$y = -e^{-t}$$

2. $y(0)=0$; $y'(0)=0$ **kezdeti feltétellel** oldja meg az

$$y'' + 9y = x$$

egyenletet!

MO.

$$\begin{aligned}
 s^2 Y + 9Y &= \frac{1}{s^2} \\
 (s^2 + 9)Y &= \frac{1}{s^2} \\
 Y &= \frac{1}{s^2(s^2 + 9)} \\
 Y &= \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{\frac{1}{9}}{s^2 + 9} \\
 Y &= \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{1}{27} \frac{3}{s^2 + 9}
 \end{aligned}$$

Innen visszatranszformálva:

$$y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} \sin(3x)$$

Próbafüggvény módszerrel megoldható egyenletek

Homogén egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned}
 y'' + ay' + by &= 0 \mapsto \lambda^2 + r\lambda + s = 0 \text{ (karakterisztikus polinom)} \\
 \lambda_{1,2} = \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}, &\text{ akkor } y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \text{ (belső rezonancia)} \\
 \lambda_{1,2} = \lambda, &\text{ akkor } y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \\
 \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, &\text{ akkor } y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x
 \end{aligned}$$

Inhomogén partikuláris alakja rezonanciák nélkül, speciális esetekben:

$$y'' + ay' + by = f(x), \text{ és}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 7x - 8, \text{ akkor } y_P = Ax + B \\
 f(x) &= 5x^2 - 4x + 2, \text{ akkor } y_P = Ax^2 + Bx + C \\
 f(x) &= 8e^{ax}, \text{ akkor } y_P = Ae^{ax} \\
 f(x) &= 7 \sin(bx), \text{ akkor } y_P = A \cos(bx) + B \sin(bx)
 \end{aligned}$$

Általános (exp., trig., pol.) esetben pedig ha

$$f(x) = e^{ax}(p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx)),$$

akkor

$$y_P = x^m e^{ax}(P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

ahol $a \pm ib$ a karakterisztikus polinomnak m -szeres gyöke és $\deg\{P\}=\deg\{Q\}=\max\{\deg P, \deg Q\}$ polinomok (úgy értve, hogy $\deg 0=-$). Tehát ha $m>0$, akkor küls? rezonancia van.

1. Adja meg az

$$y'' + 9y = x$$

egyenlet általános megoldását!

MO. $y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$, mert $\lambda^2 + 9$ gyökei $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$

$$f(x) = x \rightarrow y_P = Ax + B$$

Ezt behelyettesítve az egyenletbe:

$$9(Ax + B) = x$$

Tehát $A = \frac{1}{9}$ és $B = 0$, így az általános megoldás: $y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{9}x$,

2. (Rezonanciás feladatok)

a. $y'' + 9y = \sin(3x)$

Mo. vázlat. $\lambda^2 + 9 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Innen

$$y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Mivel

$$f(x) = \sin(3x)$$

ezért $a + bi = 3i$ egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, $m=1$ és az általános $P(x)$, $Q(x)$ polinomok konstansok: A, B , így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_P(x) = Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)$$

alakban keresend?.

b. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Mo. vázlat. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Mivel

$$f(x) = e^{2x}$$

ezért $a = 2$ kétszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért $m=2$ az általános $P(x)$, $Q(x)$ polinomok közül csak $P(x)$ marad, mert $b=0$ lévén $Q(x)$ kiesik, de $P(x)=A$ állandó, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = Ax^2 e^{2x}$$

alakban keresend?.

c. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

Mo. vázlat. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = 1; 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Mivel

$$f(x) = xe^x$$

ezért $a = 1$ egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért $m=1$ az általános $P(x)$, $Q(x)$ polinomok közül csak $P(x)$ marad, mert $b=0$ lévén $Q(x)$ kiesik ($\sin(0)=0$), de $P(x)=Ax+B$ elsőfokú, mert $p(x)=x$ (hiszen $\cos(0)=1$ és ez megmaradt), így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^x$$

alakban keresend?.

Komplex függvénytan

Folytonosság, határérték

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi függvény folytonos-e?

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4} & z \neq \pm 2i \\ \frac{3}{4}, & z = \pm 2i \end{cases}$$

Mo. A $\pm 2i$ pontokon kívül a függvény folytonos függvények felhasználásával van definiálva a folytonosságot meg?r? módokon, ezért $\pm 2i$ -n kívül folytonos. $z = 2i$ -ben a függvény $0/0$ alakú, ami határozatlan alak, de alkalmazható a L'Hospital szabály:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z - i}{2z} = \left. \frac{2z - i}{2z} \right|_{z=2i} = \frac{3}{4}$$

tehát a határérték létezik és a helyettesítési értékkel egyenl?, azaz $2i$ -ben a függvény folytonos.

$z = -2i$ -ben a függvény $-4/0$ alakú, ami a komplex függvénytanban határozott alak és ez a komplex végtelen: $-4/0 = \infty$. Tehát itt a függvény nem folytonos.

2. Hol létezik véges határértéke az alábbi függvényeknek?

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \frac{\operatorname{Im}^3(z) + i\operatorname{Re}^2(z)}{z\bar{z}} \\ \text{b)} \quad g(z) &= \frac{z}{\operatorname{Re}(z)} \end{aligned}$$

Mo. a) Legyen $z = x + iy$. Mivel $z\bar{z} = x^2 + y^2$, ezért f csak a 0-ban nincs értelmezve. Itt valós és képzetes részre bontva:

$$\frac{\operatorname{Im}^3(z) + i\operatorname{Re}^2(z)}{z\bar{z}} \equiv \left(\frac{y^3}{x^2 + y^2}, \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)$$

A sejtés, hogy a valós komponensnek van, a képzetesnek nincs határértéke. Ezért érdemes csak a képzetest megvizsgálni, mert pontosan akkor létezik a határérték, ha mindkét komponensnek létezik.

$$\begin{aligned} y \equiv 0 \text{ irányból} \quad \left. \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right|_{y=0} &= \frac{x^2}{x^2} \equiv 1 \\ x \equiv 0 \text{ irányból} \quad \left. \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right|_{x=0} &\equiv 0 \end{aligned}$$

azaz a határérték nem létezik a 0-ban. (Amúgy a valós rész határértéke létezik és 0, ugyanis rend?relvvel:

$$\left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = |y| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \frac{y^2}{y^2} = |y| \rightarrow_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

b)

$$g(z) \equiv (u, v) = \left(1, \frac{y}{x} \right)$$

Nincs értelmezve az $x=0$ pontokban, azaz az y tengely pontjaiban. Nemnulla y_0 esetén a $(0, y_0)$ ponthoz az (x, y_0) mentén tartva y_0/x -nek végtelen a határértéke, tehát ott nem létezik. Ha y_0 nulla, akkor az $(x, 0)$ mentén $y/x=0$, az (x, x) mentén $y/x=1$, azaz az origóban sincs határértéke. De mindehol máshol van, mert a határérték invariáns az alapl?veletekre.

Deriválhatóság

1. Hol deriválható komplex módon és hol reguláris az alábbi függvény?

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \bar{z}|z|^2 \\ \text{b)**} \quad g(z) &= x^2 - y^2 + 2|xy|i \end{aligned}$$

Mo. a) Legyen $z = x + iy$.

$$f(z) \equiv (u(x, y), v(x, y)) = (x^3 + xy^2, -x^2y - y^3)$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ -2xy & -x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

Ezek a parciális deriváltak mindenhol folytonosak, azaz az (u,v) pár totálisan deriválható mindenhol. Innen a Cauchy--Riemann-egyenletek:

$$3x^2 + y^2 = -x^2 - 3y^2$$

$$2xy = 2xy$$

Mivel az első, azaz $3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 = 0$ csak a 0-ban teljesül, a második pedig mindenhol, ezért a függvény pontosan a 0-ban deriválható. Ebből az is következik, hogy nincs olyan nyílt környezet, ahol minden pontban deriválható le.

b) $u = x^2 - y^2$, $v = 2|xy|$. Vegyük észre, hogy amikor $2|xy| = 2xy$ egy egész nyílt környezetben, akkor $g(z) = z^2$, azaz ezekben az esetekben reguláris a függvény. Ez az $xy > 0$ esetében van. Tehát csak a tengelyeken kell megvizsgálni. $|xy|$ az origón kívül a tengelyeken parciálisan nem deriválható. Az origóban viszont CR is fennáll és totálisan is deriválhatóak a komponensek tehát ott deriválható.

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y| \rightarrow_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

A síknegyedeken belül tehát reguláris.

2. Hol deriválható komplex módon és hol reguláris az alábbi függvény?

$$\text{a)* } f(z) = \sin(z)|z|$$

$$\text{b) } g(z) = y^2 + x^3i$$

Mo. a) HF CR-egyenletekkel igazolni, hogy $|z|$ sehol se deriválható. Azt tudjuk, hogy $\sin(z)$ mindenütt deriválható. $\sin(z) = 0$ pontosan akkor, ha $z = k\pi$ (HF). Ezért $z \neq k\pi$ esetén, ha $f(z)$ deriválható lenne, akkor

$$\frac{f'(z)}{\sin z} = \frac{1}{\sin z} \sin(z)|z| = |z|$$

is deriválható lenne, ami tehát lehetetlen. Már csak a $z = k\pi$ pontokban kell megvizsgálni, amit definíció szerint teszünk. A különbségi hányados függvény az deriválás helyén 0/0 alakú, ezért az első tényezőre alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt:

$$f'(k\pi) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{\sin(z)|z|}{z - k\pi} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{\sin(z)}{z - k\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow k\pi} |z| = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{\cos(z)}{1} |k\pi| = \cos(k\pi) |k\pi|$$

ami létezik, tehát minden k pontban deriválható a függvény, de máshol nem, így sehol sem reguláris.

b)

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezek a parciális deriváltak mindenhol folytonosak, azaz az (u,v) pár totálisan deriválható mindenhol. Innen a Cauchy--Riemann-egyenletek:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 2y &= -3x^2 \end{aligned}$$

Azaz a függvény az

$$y = -\frac{3}{2}x^2$$

parabola mentén komplex deriválható, de sehol se reguláris, mert nincs olyan nyílt környezete, melyben mindenütt deriválható lenne.

3. (Harmonikustárs-keresés)

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u \equiv 0,$$

akkor $u \in C^2(U)$ harmonikus az $U \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílton. Ha $f=u+iv$ reguláris az U tartományon, akkor u és v harmonikus. Ha u harmonikus, az U tartományon, akkor létezik U -n v harmonikus, hogy $f=u+iv$ reguláris. Ekkor v az u -nak egy harmonikus társa (és u az v -nek). Ha $f=u+iv$ reguláris, akkor u,v -re teljesülnek a CR-egyenletek.

Ha létezik, akkor adjuk meg az

$$u(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

függvény harmonikus társát!

Mo.

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 - 2 \equiv 0$$

tehát létezik harmonikus társa és ezt megtaláljuk az alábbiakból:

$$\begin{cases} \partial_x v = -\partial_y u \\ \partial_y v = \partial_x u \end{cases}, \quad \begin{cases} \partial_x v = -x + 2y \rightarrow v = -\frac{x^2}{2} + 2xy + C_1(y) \\ \partial_y v = 2x + y \rightarrow v = 2xy + \frac{y^2}{2} + C_2(x) \end{cases}$$

Tehát

$$v(x, y) = 2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

(Hát persze, hiszen $u = \operatorname{Re}((1 + i/2)z^2)$)

Elemi függvények

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\ln r e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k$$

1. Számítsa ki az

$$f(z) = \sin(iz)$$

függvény valós és képzetes részét!

MO. $z = x + iy$

2. Oldja meg a

$$e^{iz} = 2i - 2$$

egyenletet!

MO.

$$e^{iz} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{iz} = e^{\ln 2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{iz} = e^{\ln(2\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}}$$

mivel $\exp 2i$ szerint periodikus, ezért:

$$iz = \ln(2\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4} + 2\pi i k$$

$$z = -i \ln(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

3. Adja meg az

$$(1+i)^i$$

szám értékét!

MO.

$$(1+i)^i = e^{i \ln(1+i)} = e^{i(\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2\pi i k)} = e^{i \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} - 2\pi k} = e^{i \ln(\sqrt{2})} e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi k} = (\cos \ln \sqrt{2})$$

Sorok

Taylor-sor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)$$

$\text{Dom } f = B_R(z_0)$ valamely R -rel.

Laurent-sor:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$\text{Dom } f = \text{int}(B_{R_1}(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus B_{R_2}(z_0)))$ valamely R_1, R_2 -vel.

Az f függvénynek a z_0 pont izolált szingularitása, ha f reguláris a z_0 egy kipontozott környezetében, de nem reguláris z_0 -ban. Izolált szingularitás körül a függvény Laurent-sor mindig létezik ezért a sor alakja szerint osztályozzuk a szingularitásokat.

Megszüntethető, ha L.-sorban nincsenek reciprokos tagok. Ilyenkor a függvény regulárisra tehető, melynek Taylor-sora pont a Laurent-sora.

Pólusszingularitása van f -nek a z_0 pontban, ha a z_0 körüli Laurent-sor f részében $1/(z - z_0)$ -nak véges sok nemnulla hatványa szerepel. Ezek közül a $1/(z - z_0)$ legnagyobb kitevője hatványának kitevője a pólusszingularitás foka.

Lényeges szingularitása van f -nek z_0 -ban, ha a z_0 körüli Laurent-sorban $1/(z - z_0)$ -nak végtelen sok nemnulla hatványa szerepel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

1. Igazolja, hogy az

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3}$$

függvénynek megszüntethető szakadása van a 0-ban! Adja meg a reguláris kiterjesztés 100. deriváltját a 0-ban!

MO.

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3} = \frac{-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots}{z^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} \pm \dots$$

Mivel a sorfejtés egyértelmű, ezért a z^{100} tag együtthatója egyértelmű, azaz egyfelől a Taylor-sorból felírva, másfelől a most megadott sorfejtésből:

$$\begin{aligned}\frac{f^{(100)}(0)}{100!} &= -\frac{1}{103!} \\ f^{(100)}(0) &= -\frac{100!}{103!} = -\frac{1}{101 \cdot 102 \cdot 103}\end{aligned}$$

2. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z}{z+i}$$

függvényt úgy, hogy a sorfejtés a $1/2$ pontban elállítsa a függvényt!

a) a 0 körül,

b) az i körül

c) Milyen szingularitása van a $-i$ -ben? Mennyi a reziduuma ebben?

MO. a) Ha ránézünk a becses kezeinkkel rajzolt ábrára (ugye mindenki csinált ábrát!), akkor láthatjuk, hogy a reguláris, belső körbe esik mindkét pont körül az $1/2$.

$$f(z) = \frac{z}{z+i} = \frac{z}{i} \frac{1}{\frac{z}{i} + 1} = \frac{z}{i} \frac{1}{1 - \frac{-z}{i}}$$

tehát $q = \frac{-z}{i}$, ami $|z| < 1$ esetén lesz konvergens sor alakú:

$$f(z) = \frac{z}{i} \frac{1}{1 - \frac{-z}{i}} = \frac{z}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{i} \right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} z^{n+1}$$

b)

$$f(z) = \frac{(z-1)+1}{(z-1)+1+i} = \frac{z-1}{(z-1)+1+i} + \frac{1}{(z-1)+1+i} = (z-1) \frac{1}{(z-1)+1+i} + \frac{1}{(z-1)+1+i}$$

$$\frac{1}{(z-1)+1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{\frac{z-1}{1+i} + 1} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1 - \frac{-(z-1)}{1+i}}$$

tehát $q = \frac{-z+1}{1+i}$, ami $|z-1| < \sqrt{2}$ esetén lesz konvergens sor alakú:

$$\frac{1}{1+i} \frac{1}{1 - \frac{-(z-1)}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1 - \frac{-(z-1)}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(z-1)}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+i} \right)^{n+1} (z-1)^{n+1}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+i} \right)^{n+1} (z-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+i} \right)^{n+1} (z-1)^n$$

c)

$$f(z) = \frac{z}{z+i} = \frac{z+i-i}{z+i} = 1 - \frac{i}{z+i}$$

maga a $-i$ körüli Laurent-sor, itt a reciprokos tag együtthatója: $-i$, azaz ennyi a reziduum. Pólusszingularitása van itt és ennek foka 1, mert a Laurent-sor f részében csak a reciprokos szerepel.

3. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}$$

függvényt a 0 körül úgy, hogy a sorfejtés a $2i$ pontban elállítsa a függvényt! Milyen szingularitása van a 0-ban? És a $-i$ -ben?

Mo.

Az ábrából látható, hogy a szingularitáson túli gy?r?ben van $2i$, ezért $1/z$ szerint kell sorfejtteni.

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1-\frac{-i}{z}}$$

tehát $q = \frac{-i}{z}$, ami $|z|>1$ esetén lesz konvergens sor alakú, azaz $2i$ ide tartozik

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+3}$$

0 az f nevezőjének kétszeres gyöke, a számlálónak nem gyöke, a $-i$ a nevezőnek egyszeres, a számlálónak nullaszeres gyöke. Tehát 0-ban másodfokú pólusa van, $-i$ -ben elsőfokú.

4. Fejtse Laurent-sorba az

$$f(z) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

függvényt a 0 körül! Milyen szingularitása van a 0-ban?

MO.

$$f(z) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} + \frac{1}{7!z^{14}} + \dots$$

végtelen sok tag van a f részben, ezért a szingularitás lényeges.

Integrálás paraméterezéssel és Newton--Leibniz-formulával

$$\int_G f = \int_{t=t_1}^{t_2} f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

ahol G paraméterezése $t \mapsto z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ folytonosan differenciálható, f folytonos a G -t tartalmazó egy nyílt halmazon.

$$\int_{G, z_1}^{z_2} f = F(z_2) - F(z_1)$$

ahol F komplex deriválható és $F'=f$, valamint f Riemann integrálható a G mentén, G kezdőpontja z_1 , végpontja z_2

1. Adja meg az

$$f(z) = \bar{z}^2$$

függvény integrálját az

- a) Origó középpontú, pozitívan irányított egységkör $Re(z) \geq 0$ feltételt teljesít? felére!
 b) $[0, 2+i]$ szakaszra!

2. Adja meg az

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)^2}$$

függvény integrálját az

- a) Origó középpontú, pozitívan irányított kétségkör $Im(z), Re(z) \leq 0$ feltételt teljesít? negyedére! b) Origó középpontú, pozitívan irányított kétségkörre!

Integrálás Riemann-féle integráltétellel és Cauchy-féle integrálformulával

Cauchy-féle integráltétel Ha a D korlátos és zárt tartomány ∂D határa egy zárt görbével paraméterezhető és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a $D \cup \mathbb{C}$ nyílt halmazon reguláris az f függvény, akkor

$$\oint_{\partial D} f = 0$$

Riemann-féle integráltétel Ha a D korlátos és zárt tartomány ∂D határa egy zárt görbével paraméterezhető és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a $D \cup \mathbb{C}$ nyílt halmazon reguláris az f függvény, kivéve a D egyetlen pontját és f korlátos, akkor

$$\oint_{\partial D} f = 0$$

Cauchy-féle integrálformulák Ha a D korlátos és zárt, egyszeresen összefüggő tartomány $G = \partial D$ határa egy zárt görbével paraméterezhető és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a $D \cup \mathbb{C}$ nyílt halmazon reguláris az f függvény és $z_0 \in \text{int} D$, akkor

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$\oint \frac{\cos(z) - 1}{\sin(z^2)} = ? dz$$

1.* $|z|=1$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^{100}} dz = ?$$

2.

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + 4z^2} dz = ?$$

3.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(\ln z)}{z^2 - 3z + 2} dz = ?$$

4.

Integrálás reziduúmtétellel

Reziduúmtétel Ha a D korlátos és zárt, egyszeresen összefüggő tartomány $G=\partial D$ határa egy zárt görbével parameterezhető és a görbe a tartománnyal kompatibilisan irányított, továbbá a $D \cup \mathbb{C}$ nyílt halmazon reguláris az f függvény kivéve a $z_1, \dots, z_n \in \text{int } D$ pontokban, akkor

$$\oint_G f = \sum_{k=1}^n \text{Res}^f(z_k)$$

ahol $\text{Res}^f(\cdot)$ az f függvény körüli azon Laurent-sorának c_{-1} együtthatója, mely a függvényt a egy kipontozot környezetében állítja elő.

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 5z + 1}{\text{sh}(z)} dz = ?$$

1.*

$$\oint_{|z-3|=1} \frac{5z + 1}{\sin(z)} dz = ?$$

2.

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2+2}}{(2z+4) \sin(\frac{\pi z}{4})} dz = ?$$

3.

Vektoranalízis

Differenciáloperátorok

1. Hol létezik és mennyi az alábbi függvények gradiense?

$$\text{a) } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^4$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$$

b)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sin(|\mathbf{r}|^3)$$

c)

2. Hol létezik és ott mi az alábbi térbeli vektormez? rotációja és divergenciája?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^6$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ ($\mathbf{k}$ a z irányú egységvektor)

Potenciálkeresés

1. Ha van, mi az alábbi térbeli vektormez? potenciálja?

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy^3, 3x^2y^2, z^2)$$

2. Ha van, mi az alábbi síkbeli vektormez? potenciálja?

$$\mathbf{v}(x, y) = (x^3 + y^3, 3xy^2)$$

3. Ha van, mi az alábbi függvény potenciálja?

a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^6$

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{2\mathbf{r}}{1 + |\mathbf{r}|^2}$

Vonalintegrál

$$\int_{G, \mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt$$

ahol $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$.

$$\int_G \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_G v_t \, |d\mathbf{r}|$$

ahol v_t a vektormez?nek a görbe érint?je irányú komponense, az integrál pedig a vektormez? ívhossz szerinti integrálja.

1. Számítsuk ki az alábbi vektormez?nek az $A=(1,-2,3)$, $B=(2,1,4)$ végpontú egyenes szakaszra vonatkozó integrálját!

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

2. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó középpontú körre vonatkozó integrálját!

3. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} / |\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^2$ függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó középpontú körre vett integrálját!

Felületi integrál

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{F} = \int_{F_{u,v}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right) du dv$$

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{F} = \int_F v_n |d\mathbf{F}|$$

felszín integrállal a normális irányú komponensb?l.

1. Számítsuk ki a $\mathbf{v}$ vektormez?nek az $\mathbf{r}$ felületre vett integrálját:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(u, v) &= (u + 2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k}, \quad u \in [0, 3], \quad v \in [0, 1] \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ -nek az R sugarú, M magasságú, z tengely? hengerre vonatkozó felületi integrálját!

3. Számítsuk ki az R sugarú origó középpontú gömbnyolcad felszínére az $\mathbf{v} = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$ integrálját!