

Tartalomjegyzék

- 1 Differenciálgeometria
 - ◆ 1.1 Ívhossz és ívhosszparaméterezés
 - ◆ 1.2 Felszín
 - ◆ 1.3 Érint?sí
- 2 Differenciálegyenletek
 - ◆ 2.1 Egzaktra visszavezethet? egyenlet
 - ◆ 2.2 Függvényegyütthatós lineáris egyenlet
 - ◆ 2.3 Lineáris állandóegyütthatós
 - ◆ 2.4 Hiányos magasabbrend?
- 3 Integrálátalakító tételek
 - ◆ 3.1 Gauss-tétel
 - ◆ 3.2 Stokes-tétel
 - ◆ 3.3 Potenciálkeresés
- 4 Komplex
 - ◆ 4.1 Cauchy-féle integrálformulák
 - ◆ 4.2 Harmonikus társ keresése
 - ◆ 4.3 Valós és képzetes rész kiszámítása
 - ◆ 4.4 Komplex egyenlet
 - ◆ 4.5 Komplex elemi függvény kiszámítása

Differenciálgeometria

Ívhossz és ívhosszparaméterezés

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

$$s(t') = \int_{t_0}^{t'} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

$$s = s(t') \quad \rightarrow \quad t' = t'(s) \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t')|_{t'=t'(s)}$$

1. a) Mi az alábbi görbe ívhossza a [1,e] paraméterszakaszon és mi az ívhosszparaméterezése t=1-től kezd?d?en?

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos \ln t, t \sin \ln t, t)$$

b) Mi az alábbi görbe ívhossza a [0,1] paraméterszakaszon és mi az ívhosszparaméterezése t=0-tól kezdődően?

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{t^3}, 2t, \frac{3}{2}t^2 \right)$$

MO.: a)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \left(\cos \ln t - t \sin \ln t \cdot \frac{1}{t}, \sin \ln t + t \cos \ln t \cdot \frac{1}{t}, 1 \right) = (\cos \ln t - \sin \ln t, \sin \ln t + \cos \ln t, 1) \\ |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \sqrt{(\cos \ln t - \sin \ln t)^2 + (\sin \ln t + \cos \ln t)^2 + 1} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \ln t + \sin^2 \ln t - 2 \cos \ln t \sin \ln t + \cos^2 \ln t + \sin^2 \ln t + 2 \cos \ln t \sin \ln t + 1} = \end{aligned}$$

Ívhossz: [1,e]-n:

$$s = \int_1^e \sqrt{3} dt = [\sqrt{3} \cdot t]_1^e = \sqrt{3}(e - 1)$$

Ívhossz paraméterezés t=1-t'!

$$\begin{aligned} s(t') &= \int_{t=1}^{t'} \sqrt{3} dt = [\sqrt{3} \cdot t]_1^{t'} = \sqrt{3}(t' - 1) \quad \rightarrow \quad t' = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \\ \mathbf{r}(s) &= \left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cos \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \sin \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right), \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{t^3} &= t^{\frac{3}{2}} \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{t}, 2, \frac{3}{2} \cdot 2t \right) = (2\sqrt{3}\sqrt{t}, 2, 3t) \\ |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \sqrt{12t + 4 + 9t^2} = \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet áll:

$$= \sqrt{12t + 4 + 9t^2} = \sqrt{9t^2 + 12t + 4} = \sqrt{(3t + 2)^2} = |3t + 2| \quad \text{ez } t > 0 \text{-ra persze azonos } 3t+2 \text{-vel.}$$

Ívhossz: [1,e]-n:

$$s = \int_0^{10} 3t + 2 dt = \frac{(3t + 2)^2}{6} \Big|_0^{10} = \frac{(32)^2}{6} - \frac{2}{3}$$

Ívhossz paraméterezés t=0-tól:

$$s(t') = \int_{t=1}^{t'} 3t + 2 dt = \left[\frac{(3t + 2)^2}{6} \right]_0^{t'} = \frac{(3t' + 2)^2}{6} - \frac{2}{3}$$

$$t' = \frac{\sqrt{6(s + \frac{2}{3})} - 2}{3} = \frac{\sqrt{6s + 4} - 2}{3}$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6s + 4} - 2}{3} \right)^3}, 2 \frac{\sqrt{6s + 4} - 2}{3}, \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{6s + 4} - 2}{3} \right)^2 \right)$$

Felszín

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ esetén

$$A = \iint_{T_{u,v}} |\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}| du dv$$

$z = f(x, y)$ esetén

$$A = \iint_{T_{x,y}} \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1} dx dy$$

2. a) Számítsuk ki a $z = x^2 - y^2$ egyenlettel adott felület azon darabjának felszínét, melyet az $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ feltételek adnak meg!

$$z = \frac{x^2}{2y}$$

b) Számítsuk ki a $z = \frac{x^2}{2y}$ egyenlettel adott felület azon darabjának felszínét, melyet az $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 3$ feltételek adnak meg!

c) Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ felület azon darabjának felszínét, melyet a $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq \pi$ feltételek adnak meg!

MO.: a)

$$\sqrt{(\partial_x z(x, y))^2 + (\partial_y z(x, y))^2 + 1} = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$$

Mivel a tartomány is és a függvény is hengersizimetriát mutat (minden amiben $x^2 + y^2$ van, az hengersizimetrius), ezért az integrált hengerkoordinátákban számítjuk ki. A tartomány derékszög? és polárparaméterezése (érdemes felrajzolni koordinátarendszerben és leolvasni az r -t, θ -t), r a Jacobi-determináns:

$$T_{x,y} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

$$T_{r,\varphi} = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$A = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^2 \sqrt{4r^2+1} r dr d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^2 \sqrt{4r^2+1} 8r dr d\varphi = \frac{1}{8} [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{2}{3} (4r^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^2$$

b)

$$\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(-2\frac{x^2}{4y^2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4} + 1} =$$

Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt egy teljes négyzet

$$= \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4} + 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{2y} + 1\right)^2} = \left|\frac{x}{2y} + 1\right|, \text{ ami } \frac{x}{2y} + 1, \text{ a } 0 \leq x \leq 1,$$

$1 \leq y \leq 3$ feltételek mellett.

$$T_{x,y} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$$

$$A = \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^3 \frac{x}{2y} + 1 dy dx = \int_{x=0}^1 [2x(\ln y) + y]_{y=1}^3 dx = \int_{x=0}^1 2x(\ln 3) + 2 dx = [x^2(\ln 3) + 2x]_{x=0}^1$$

Érint?sík

Ha $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ a felület, akkor az érint?sík normálisa:

$$\mathbf{n} = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}, \text{ ha pedig } \mathbf{n}=(A,B,C), \text{ akkor az érint?sík egyenlete:}$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

ahol (x_0, y_0, z_0) annak a pontnak a koordinátái, ahol az érint?síkot keressük, ez néha $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ -ként van meghatározva. Speciálisan, ha $z=f(x,y)$ és $u=x, v=y$, akkor $\mathbf{n} = (\partial_x f, -\partial_y f, 1)$. Ugyanis ekkor $(x,y,f(x,y))$ a felület és

$$\partial_x \mathbf{r} = (1, 0, \partial_x f)$$

$$\partial_y \mathbf{r} = (0, 1, \partial_y f)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \partial_x f - \mathbf{j} \partial_y f + \mathbf{k}$$

3. a) $\mathbf{r}(u, v) = (e^u \sin v, e^u, uv + 1)$. Mi az érint?síkja az $(u,v)=(0,0)$ -ban?

b) $z = x^2 - y^2$ érint?síkja a $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$ -ben.

MO.: a)

$$\begin{aligned}\partial_u \mathbf{r} &= (e^u \sin v, e^u, v) \\ \partial_v \mathbf{r} &= (e^u \cos v, 0, u)\end{aligned}$$

az adott (0,0) pontban

$$\begin{aligned}\partial_u \mathbf{r} &= (0, 1, 0) = \mathbf{j} \\ \partial_v \mathbf{r} &= (1, 0, 0) = \mathbf{i}\end{aligned}$$

ezek vektoriális szorzata: $-\mathbf{k}$, azaz a normálvektor: $(A,B,C)=(0,0,-1)$ vagy egyszerűbben $(A,B,C)=(0,0,1)$ mert az érintősíknál nincs jelentősége a normálvektor irányításának. Az adott pont:

$\mathbf{r}(0, 0) = (0, 1, 1) = (x_0, y_0, z_0)$ Tehát a sík egyenlete: $z-1=0$, azaz $z=1$.

$$\text{b) } \mathbf{n} = (2x, -2y, 1) = (0, -2, 1) = (A, B, C)$$

$$-2(y - 1) + z + 1 = 0$$

Differenciálegyenletek

Egzaktra visszavezethető egyenlet

Mi a megoldása az $x^2 - y^2 + 3xyy' = 0$ egyenletnek?

MO.:

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0 \text{ legyen itt:}$$

$$\begin{aligned}P(x, y) &= x^2 - y^2, & Q(x, y) &= 3xy \\ \partial_y P - \partial_x Q &= -2y - 3y = -5y\end{aligned}$$

$$R(x) = \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} = \frac{-5y}{3xy} = -\frac{5}{3} \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{5}{3} \frac{1}{x} dx} = e^{-\frac{5}{3} \ln|x|} = x^{-\frac{5}{3}}$$

$$(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} y^2)dx + 3x^{-\frac{2}{3}} y dy = 0$$

Függvényegyütthatós lineáris egyenlet

Mi a megoldása az $y' - 2xy = x$ egyenletnek? Melyik az a partikuláris megoldás, melyre

$$y(0) = -\frac{1}{2}?$$

MO.:

A homogén megoldása:

$$\begin{aligned}y' - 2xy &= 0 \\ y' &= 2xy\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (y = 0 \text{ mo.})$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln |y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = ce^{x^2}$$

els?rend? homogén lineáris megoldása egy egydimenziós függvénytér, ebben a 0 is benne van.

Az inhomogén egy partikuláris megoldását az alábbi alakban keressük:

$$y = c(x)e^{x^2}$$

$$y' = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2}$$

Behelyettesítve:

$$c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2} - 2xc(x)e^{x^2} = x$$

$$c'(x)e^{x^2} = x$$

$$c'(x) = xe^{-x^2}$$

$$c(x) = -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

elég egy partikuláris megoldás.

Innen az inhomogén általános megoldása:

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

A kezdeti érték feladathoz:

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = c - \frac{1}{2}$$

Azaz $c=0$ és így

$$y_P = -\frac{1}{2}$$

Lineáris állandóegyütthetős

Minden

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + \dots + f_n(x)y^{(n)} = f(x)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldásainak halmaza

Függvényegyütthetős lineáris egyenlet

$$y = y_H + y_P$$

alakú, ahol y_H a homogén

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + \dots + f_n(x)y^{(n)}$$

egyenlet megoldása, y_p pedig az egyenlet egy partikuláris megoldása.

Állandóegyütthatójú, ha

$$f_0(x) = a_0, f_1(x) = a_1 + \dots + f_n(x) = a_n \text{ számok.}$$

Gyakran csak másodrend?:

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

ha $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Ilyenkor a homogén egyenlet megoldását az $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásából származó gyökökből száraztatjuk (bizonyítása a bizonyítások között).

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ ha } \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R} \\ y(x) &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \text{ ha } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R} \text{ (gyök vagy belső rezonancia esete)} \\ y(x) &= C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \text{ ha } \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet megoldását a következő alakban keressük. Ha az inhomogén tag az alábbi alakban írható

$$f(x) = e^{ax} (p(x) \cos(bx) + q(x) \sin(bx))$$

ahol $p(x)$ és $q(x)$ polinomok és $a+ib \in \mathbf{C}$ szám m szeres gyöke az $\lambda^2 + b\lambda + c$ karakterisztikus polinomnak, akkor az $y_p(x)$ partikuláris megoldásra a feltevés:

$$y_p(x) = x^m e^{ax} (P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx))$$

ahol $P(x)$ és $Q(x)$ olyan polinomok, hogy $\deg P(x) = \deg Q(x) = \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$.

4. $y'' + 4y = \sin(2x)$ kezdeti feltételek: $y(0) = 0, y'(0) = -1$

MO.: I. Először a homogén egyenletet oldjuk meg:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ \lambda^2 + 4 &= 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad (\text{tehát a megoldás } \alpha \pm \beta i, \text{ alakú, ahol } \alpha = 0, \beta = 2) \end{aligned}$$

$$y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

II. Vegyük észre, hogy a karakterisztikus egyenlet $\lambda = 2$ gyöke rezonanciában van az $\sin(2x)$ inhomogén tag 2 frekvenciájával. Ekkor egy x szorzót veszünk hozzá az $A \sin(2x) + B \cos(2x)$ kifejezéshez, ezért a próbafüggvény:

$$y_P = x(A \sin(2x) + B \cos(2x))$$

lesz.

$$y'_P = A \sin(2x) + 2Ax \cos(2x) + B \cos(2x) - 2Bx \sin(2x)$$

$$y''_P = 2A \cos(2x) + 2A \cos(2x) - 4Ax \sin(2x) - 2B \sin(2x) - 2B \sin(2x) - 4Bx \cos(2x)$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$

$$4A \cos(2x) - 4Ax \sin(2x) - 4B \sin(2x) - 4Bx \cos(2x) + 4xA \sin(2x) + 4Bx \cos(2x) = \sin(2x)$$

$$4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) = 1 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x)$$

Az együtthatókat leolvassva:

$$4A = 0, -4B = 1 \text{ azaz } A = 0, B = -\frac{1}{4}$$

Az általános megoldás:

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x)$$

A kezdeti érték feltételből a konstansok:

$$y(0) = 0$$

$$0 = C_1$$

$$y'(0) = -1$$

$$y' = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$-1 = +2C_2 - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = +2C_2$$

$$-\frac{1}{4} = C_2$$

5.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \text{ kezdeti feltételek: } y(0) = 1, y'(0) = -1$$

MO.: I. Először a homogén egyenletet oldjuk meg:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

II. Vegyük észre, hogy 2 gyök rezonál az exponenciális frekvenciájával. Ezért a partikuláris megoldást

$$y = Axe^{2x}$$

alakban keressük.

$$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 6Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$-A = 1$$

$$A = -1$$

Általános megoldás:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x}$$

A kezdeti érték feltételből a konstansok:

$$y(0) = 1: x=0, y=1$$

$$1 = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = -1: x=0, y'=-1$$

$$y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} - e^{2x} - 2xe^{2x}$$

$$-1 = 2C_1 + 3C_2 - 1$$

$$0 = 2C_1 + 3C_2 \text{ azaz } C_2 = -\frac{2}{3}C_1$$

$$1 = C_1 + C_2$$

$$1 = C_1 - \frac{2}{3}C_1 \text{ azaz } 1 = \frac{1}{3}C_1 \text{ azaz } C_1 = 3 \text{ azaz } C_2 = -2$$

Hiányos magasabbrend?

1 2

Gyakori probléma a lineáris, melyet hiányosként oldunk meg:

6.

$$y''' + 2y'' + y' = 3x^2$$

Ez egy y-ban hiányos lineáris. Valójában olyan, mintha nem is y-ra, hanem y'-re lenne felírva az egyenlet. Ilyenkor érdemes először y'-re megoldani, majd y'-t integrálni, hogy y-hoz jussunk. Ehhez bevezetjük a p(x)=y'(x) új ismeretlen függvényt. Ekkor az egyenlet:

$$p'' + 2p' + p = 3x^2$$

Ez már egy állandó együtthatójú másodrendű lineáris. Először megoldjuk p-re.

I. Karakterisztikus polinom

Hiányos magasabbrend?

$$^2 + 2 + 1 = 0$$

Ez egy teljes négyzet:

$$(+ 1)^2 = 0 \text{ azaz } \lambda_{1,2} = -1, \text{ vagyis bels? rezonancia van, a gy?kok egybeesnek.}$$

$$p_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

II. Pr?baf?ggvény a m?sodfok? polinom miatt:

$$p_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$p_p' = 2Ax + B$$

$$p_p'' = 2A$$

$$2A + 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 3x^2$$

$$2A + C + 2B + (4A + B)x + Ax^2 = 3x^2$$

$$A=3, B=-12, C=-6+12=6$$

Innen

$$p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3x^2 - 12x + 6$$

Az y -t a $p=y'$ egyenlet miatt a p integrálásával kapjuk:

$$y = -C_1 e^{-x} - C_2 x e^{-x} - C_2 e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 6x + D$$

ahol a középs? tag parciális integrálással kapható:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} dx$$

Integrálátalakító tételek

Gauss-tétel

Gauss-tétel: Ha V olyan mérhet? korlátos térfogat, melyet az F felület határol és \mathbf{v} olyan folytonosan differenciálható vektormez?, mely a V -t és az F -et tartalmazó nyílt halmazon értelmezett, és az F a V -b?l kifelé van irányítva akkor

$$\oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

F. Számítsuk ki $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ és $z=1$ egyenletek által meghatározott felületek által bezárt korlátos térfogat kifelé irányított határára a

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^3 z^2, y^3 z^2, xy)$$

vektormez? integrálját!

MO. Láthatóan a felület hengersizmetrikus, hiszen csak r -t?l és z -t?l függ ($x^2 + y^2$ van benne).

$$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \text{ hengerkoordinátákban:}$$

$$z = \sqrt[3]{r^2}$$

ez egy gyökfüggvény a z tengely körül körbeforgatva (tölcsér) és a magassága z=1. A két felület metszésvonala:

$$z = \sqrt[3]{r^2}$$

$$z = 1$$

azaz

$$1 = \sqrt[3]{r^2}$$

és

$$r = 1, z = 1.$$

Alulról tehát a tölcsér, felülr?l egy sík határolja a térfogatot, ezért a fels? határ: z=1, az alsó határ $z = \sqrt[3]{r^2}$, miközben a sugár $0 \leq r \leq 1$ és a forgásszimmetria miatt: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = 3x^2 z^2 + 3y^2 z^2 = 3z^2 r^2$$

$$\begin{aligned} \oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r^{\frac{2}{3}}}^1 r^2 3z^2 r \, dz dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 [r^3 z^3]_{z=r^{\frac{2}{3}}}^1 dr d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^3 - r^5 \, dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \, d\varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

F. Számítsuk ki $z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ és $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ egyenl?tlenségek által meghatározott korlátos térfogat kifelé irányított határára a

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(y, x, \frac{1}{3} z^3 \right)$$

vektormez? integrálját!

MO.: Zárt térfogatra kell integrálni, ez Gauss-tétel lesz. A vektormez? divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = 0 + 0 + z^2 = z^2$$

A $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ feltételek az els? tényoldatot határozzák meg, az $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ egyenlet pedig a 2 sugarú, origó középpontú gömbfelületet fels? felét, ugyanis gömbi koordinátákban r az origótól mért távolság:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$r^2 = 4$$

A tartomány gömbi paraméterezése

$$V_{r,\varphi,\vartheta} = \left\{ (r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

mivel

$$z = r \cos \vartheta$$

és a Jacobi-determináns:

$$r^2 \sin \vartheta$$

ezért

$$\oint_F \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi dr = \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \left(\int_{r=0}^2 r^4 dr \right) \cdot \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi \right) = \frac{2^5}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Stokes-tétel

Stokes-tétel: Ha F olyan határral rendelkező felület, melynek határa a G zárt görbe és ezek kompatibilisen vannak irányítva, (azaz a jobbkézszabállyal), akkor minden az ezeket tartalmazó nyílt halmazon értelmezett \mathbf{v} folytonosan differenciálható vektormezőre

$$\oint_G \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Megjegyzés. A \mathbf{v} vektormező integrálját az $F: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ megadású $T_{u,v}$ értelmezési tartományú felületdarabra a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \iint_{T_{u,v}} \begin{vmatrix} w_1(\mathbf{r}(u, v)) & w_2(\mathbf{r}(u, v)) & w_3(\mathbf{r}(u, v)) \\ (\partial_u \mathbf{r})_1 & (\partial_u \mathbf{r})_2 & (\partial_u \mathbf{r})_3 \\ (\partial_v \mathbf{r})_1 & (\partial_v \mathbf{r})_2 & (\partial_v \mathbf{r})_3 \end{vmatrix} du dv$$

F. Számítsuk ki a $z = x^2 - 1$ felület $x^2 + y^2 \leq 9$ feltételnek eleget tevő darabjának határára a $\mathbf{v}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ vektormező görbementi integrálját!

MO. Megvan a felület is és a pereme is, ezért Stokes. Ehhez a rotációt kell meghatározni.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z, 2x)$$

A felület paraméterezése $z=f(x,y)$ -nál mindig $x=u, y=v$ választással:

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

A vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}(x, y)) \\ \partial_x \mathbf{r}(x, y) \\ \partial_y \mathbf{r}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2(x^2 - 1) & 2x \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 4xy$$

$$\oint_G \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} df = \iint_{T_{x,y}} 2x - 4xy dx dy =$$

Ez a $x^2 + y^2 \leq 9$ forgásszimmetriája miatt polárkoordinátákban

$$= \int_{r=0}^3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r^2 \cos \varphi - 4r^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi dr = \int_{r=0}^3 [2r^2 \sin \varphi - 2r^3 \sin^2 \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0$$

Potenciálkeresés

Ha van olyan u , hogy $\operatorname{grad} u = \mathbf{v}$, akkor minden az értelmezési tartományba es?

$G: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t_1 \leq t \leq t_2$ görbére, ha $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ és $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, akkor

$$\int_G \mathbf{v} d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

Mi az u , ha $\operatorname{grad} u = (yz, xz, xy)$? Mi a $\operatorname{grad} u$ integrálja a $(0,0,0)$ és $(2,3,4)$ közötti egyenes szakaszon?

Komplex

Cauchy-féle integrálformulák

Az n -edik deriváltra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulák:

$$\oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

f reguláris, G az f értelmezési tartományában egyszer? görbe, egyszer hurkolja körül z_0 -t.

Cauchy-tétel: Ha T a komplex számsík olyan tartománya, melynek határa a G egyszeres görbe (ez lehet véges sok diszjunkt görbe uniója is, azaz a T kontúrja véges sok zárt darabból) és a jobbkézsabály szerint van irányítva és az f komplex reguláris függvény a tartományt és a határát tartalmazó nyílt halmazon van értelmezve, akkor

$$\oint_G f(z) dz = 0$$

F.

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z^2 + 4)(z - 1)^2} dz = ?$$

MO.: Szorzattá alakítjuk a nevezőt (ez mindig fog menni elsőfokú szorzatával, mert a komplex számok körében vagyunk!). Ábrázoljuk a görbét és a nevező gyökhelyeit. Enélkül nem megy!

$(z^2 + 4)(z - 1)^2 = (z - 2i)(z + 2i)(z - 1)^2$ gyökök: 1 (ez egy kettes multiplicitású gyök, mert kétszeres gyöke a nevezőnek), $+2i$, $-2i$ (egyszeresek).

A $|z - i| = 2$ kör a 2 sugarú, i körüli kör, melyben a gyökök közül az 1 és a $2i$ van benne.

Legyen K_1 az 1 körüli $1/100$ sugarú kör, K_2 a $2i$ körüli $1/100$ sugarú kör. Az integrált a Cauchy-tétel alapján felbonthatjuk az integrandus K_1 és K_2 körüli integráljára.

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z^2 + 4)(z - 1)^2} dz = \oint_{K_1} \frac{\frac{e^z}{z^2+4}}{(z - 1)^2} dz + \oint_{K_2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2i)}}{z - 2i} dz =$$

Itt az első integrálnál $\frac{e^z}{z^2 + 4}$ reguláris K -ben, a nevező fokszáma 2, azaz az $n=1$ -re vonatkozó

Cauchy-formulát kell alkalmazni a $z = 1$ ponttal, továbbá a második integrálnál $\frac{e^z}{(z - 1)^2(z + 2i)}$ reguláris K_2 -ben, $n = 0$ és $z_0 = 2i$.

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{e^z}{z^2 + 4} \right)' \Big|_1 + \frac{2\pi i}{1} \frac{e^z}{(z - 1)^2(z + 2i)} \Big|_{2i} = \frac{2\pi i}{1} \frac{e^z(z^2 + 4) - 2e^z z}{(z^2 + 4)^2} \Big|_1 + \frac{2\pi i}{1} \frac{e^{2i}}{(z - 1)^2} \Big|_{2i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{3e}{25} + \frac{e^{2i}}{4i(2i - 1)^2} \right) \end{aligned}$$

Harmonikus társ keresése

Mi a v , ha $u = x^2 - y^2 - e^x \cos y$ és $f = u + iv$ reguláris.

Valós és képzetes rész kiszámítása

Mi a valós és képzetes része az $f(z) = 4(\operatorname{sh}(iz))^2$ függvénynek?

Komplex egyenlet

Mi a megoldása a $\sin z = i$ egyenletnek?

Komplex elemi függvény kiszámítása

Mi algebrai alakban $(1 + i)^i$