

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Hol folytonos, deriválható és hol folytonos a derivált?

MO.

b) Nullán kívül deriválható és a deriváltja:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

Nullában a két egyoldali deriváltat nézzük meg:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

azaz létezik a derivált és ez a nullában nulla, mert a baloldali és jobboldali derivált létezik és egyenl?: $f'(0) = 0$

a) Mivel f mindenhol deriválható, ezért f mindenhol folytonos.

c) A deriváltfüggvény tehát

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ez a nullán kívül mindenütt folytonos. A nullában meg kell nézni az egyoldali határértékeket!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \end{aligned}$$

Tehát létezik f -nak határértéke és ez 0. Ez azonban *egyenl? a helyettesítési értékével*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

ezért a deriváltfüggvény folytonos a nullában is.