

Tartalomjegyzék

- 1 Alterek
- 2
- Egyenletrendszerek
- 3
- Sajátértékfeladatok
- 4
- Mátrixegyenletek

Alterek

1. Igazolja, hogy ha W_1 és W_2 altér V -ben, akkor

$$W_1 \cap W_2 \text{ altér}$$

Ugyanis, ha $u, v \in W_1 \cap W_2$, akkor $u, v \in W_1$ és $u, v \in W_2$, de ezek zártak az összeadásra és a számmal való szorzásra, ezért: $u+v \in W_1$ és $u+v \in W_2$, azaz $u+v \in W_1 \cap W_2$ és $\lambda u \in W_1$ és $\lambda u \in W_2$, azaz $\lambda u \in W_1 \cap W_2$.

2. Igazoljuk, hogy ha W_1 és W_2 altér V -ben és $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, akkor

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle < \dim W_1 + \dim W_2$$

Először belátjuk, hogy

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle \leq \dim W_1 + \dim W_2$$

ha B bázis W_1 -ben és C bázis W_2 -ben BUC generátorrendszer $\langle W_1, W_2 \rangle$ -nek, de nem nagyobb a számossága, mint $|B|+|C|$

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle \leq |BUC| \leq |B| + |C|$$

Most belátjuk, a szigorú egyenlőtlenséget. $W_1 \cap W_2$ altér mindkét altérben, ezért ha a metszet nem 0, akkor egy $D \subset W_1 \cap W_2$ bázis kiegészíthető W_1 bázisává és W_2 bázisává: $B' \cup D$ és $D \cup C'$ -vel. Feltehető, hogy B' elemei különböznek C' elemeitől, mert ha nem, akkor könnyen nyújthatók.

$$\dim\langle W_1, W_2 \rangle \leq |B' \cup D \cup C'| = |B'| + |D| + |C'| < |B'| + |D| + |D| + |C'| = \dim W_1 + \dim W_2$$

hiszen D elemeit kétszer számoltuk.

Egyenletrendszerek

1.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -3x + 2y - z &= 0 \\ -2x + y + az &= -1 \end{aligned}$$

Mo.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a+2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

$Ax=b$ -nek pontosan akkor van megoldása, ha $r(A)=r(A|b)$ (itt a $r(A)$ az A mátrix rangja). $r(A)$ az oszlopok által kifeszített altér dimenziója.

$$3 \leq r(A|b) \leq 3$$

hisz egyrészt csak háromemeletesek, másrészt van három független (1.,2.,4. oszlop). $r(A)=3$ pontosan akkor, ha $a \neq 0$. Ezesetben pedig valóban 1 megoldás van, mert $\det(A) \neq 0$.

Megoldás: $x_0 + \text{Ker}(A)$, $\text{Ker}(A)=\{0\}$, mert A invertálható:

$$x_0=(1,2,1)$$

2.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2 \\ -y + z &= 1 \\ x + y + z &= b \end{aligned}$$

$$[A|y] \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Megoldhatóság: $b=0$

Megoldások száma: végtelen, mert $\dim \text{Ker}(A)=3-\dim \text{Im}(A)=3-2=1$

Megoldások: inhomogén: $(-1,0,1)$. $\text{Ker}(A)=\{t(-2,1,1)\}$

Sajátértékfeladatok

1. Legyen A az $x+2y=0$ egyenesre tükrözés operátora. Számítsa ki az

$$B = A^{2009} - A^2 + I$$

leképezés sajátértékeit és sajátvektorait!

A tükrözés, így páratlanadik hatványa önmaga, párosadik pedig az I . Emiatt $B=A$.

Mivel az egyenes: $(1,2) \cdot (x,y)=0$ ezért az egyik sajátvektor az $(1,2)$, ehhez a -1 sajátérték tartozik, a másik $(2,-1)$, melyhez az 1 .

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

határozzuk meg az A^{2009} sajátvektorait, sajátértékeit!

Ez egy $y-x=0$ -be képez? projekció. Az $\{(1,1), (-1,1)\}$ bázisról áttérés:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek inverze:

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Emiatt A a másik bázisban:

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek n -edik hatványa:

$$A'^n = \begin{pmatrix} 3^n & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, emiatt a sajátértéke 3^{2009} , a sajátvektor pedig: $(1,0)$, azaz a régi bázisban $(1,1)$.

3. Határozzuk meg

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sajátvektorait, sajátértékeit!

Szimmetrikus, a karakterisztikus egyenlet:

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0$$

Megoldása: $-1, 3$ Ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

szinguláris mátrixok magjaiból egy-egy elem.

Mátrixegyenletek

1. Oldja meg X-re!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

A invertálható, így beszorozhatunk az inverzével:

$$X = A^{-1}B$$

Itt A-t meghatározhatjuk együttes Gauss-szal.

2. Oldja meg X-re!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

A nem invertálható. A megoldást szintén Gauss-szal kereshetjük. B és X első oszlopait b-bel és x-szel jelölve: $Ax=b$ -t kell megoldanunk, ha ez van és a másik oszlopokra is van, akkor ezeket összetéve adódik egy megoldás (ill. akár az összes is ha ezeket megfelelően csoportosítjuk).