

Tartalomjegyzék

- 1 Egzakt differenciálegyenlet
 - ◆ 1.1 Definíció
 - ◆ 1.2 Egzakt egyenlet egzisztencia- és unicitástétele
 - ◆ 1.3 Az egzakttság jellemzése
- 2 Lineáris differenciálegyenletek
 - ◆ 2.1 Inhomogén lineáris egyenlet megoldásai
 - ◆ 2.2 Els?rend? inh. lin. diff. egyenlet és az állandó variálása
 - ◆ 2.3 Másodrend?, áll. eh? hom. egyenlet
- 3 A deriválttenzor invariánsai
- 4 Potenciál
 - ◆ 4.1 Jellemzés
 - ◆ 4.2 Gradiensre vonatkozó integráltétel
 - ◆ 4.3 Hossz n-edik deriváltja
- 5 Felületi integrál, Gauss-tétel
 - ◆ 5.1 A ponttöltés keltette elektromos mez? divergenciája, fluxusa
- 6 Vonalintegrál, Stokes-tétel
 - ◆ 6.1 Végtelen hosszú egyenes vezet? keltette mágneses mez? rotációja és cirkulációja
- 7 CROSS és alkalmazása és a Green-tétel
 - ◆ 7.1 Leképezések invariánsai
 - ◆ 7.2 A deriválttenzor invariánsai
 - ◆ 7.3 Integrálok kiszámítási formulái
 - ◆ 7.4 Green-tétel

Egzakt differenciálegyenlet

Definíció

Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, Q sehol sem nulla. Azt mondjuk, hogy az

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (\text{EX})$$

differenciálegyenlet *egzakt*, ha létezik olyan $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (\text{C})$$

Elméleti példa. Minden

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (f \in C(I), g \in C(J), 0 \notin \text{Ran}(g))$$

alakú szeparábilis differenciálegyenlet egzakt, hiszen ha g integrálfüggvénye G , akkor

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C$$

Alkalmas tehát az alábbi függvény:

$$\Phi(x, y) := G(y) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g$$

Jelen esetben a G függvény deriváltja ($G'=g$) sehol sem nulla folytonos függvény, ezért szigorúan monoton. Emiatt kifejezhető y és pedig:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Megjegyzés. A megoldásokat implicit módon adja meg az

$$\Phi(x, y) = C$$

egyenlet. Mivel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$$

ezért az implicitfüggvény-tétel miatt y -t <http://wiki.math.bme.hu> lehet fejezni <http://wiki.math.bme.hu>. Érdemes felelevenítenünk magát az implicitfüggvény-tételt:

Implicitfüggvény-tétel -- Ha a $\Phi : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény az $(x_0, y_0) \in \text{int}(I \times J)$ pontban teljesíti a $\partial \Phi / \partial y \neq 0$ feltételt, akkor a (x_0, y_0) pont egy környezetében egyértelműen létezik az $(x, y) = (x_0, y_0)$ egyenletnek az (x_0, y_0) ponton áthaladó implicit függvénye, azaz az x_0 egy $K \subset I$ környezetében értelmezett, J -beli értékű y deriválható függvény, melyre minden $x \in K$ esetén:

$$\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0$$

és ennek deriváltja minden $x \in K$ -ban:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} \bigg|_{(x, y(x))}$$

Egzakt egyenlet egzisztencia- és unicitás tétele

Tétel. Legyenek P és Q az $U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett folytonos valós függvények, Q sehol se nulla, $\text{grad } F = (P, Q)$ valamely $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvénnyel és $(x_0, y_0) \in U$. Ekkor

1) az

$$(ex) \ y' = -P/Q$$

egyenletnek egyértelműen létezik az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő y lokális megoldása és

2) az

$$(impl) \ F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

egyenlet (x_0, y_0) -on áthaladó egyetlen lokális implicit függvénye az (ex) egyenlet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégíti? egyetlen lokális megoldása.

Biz. 1) Egzisztencia. Belátjuk, hogy (impl) egyetlen (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye megoldása az (ex) egyenletnek.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

így az implicitfüggvény-tétel szerint, egyértelműen létezik F-nek $y=y(x)$ implicit függvénye az adott pont egy környezetében és ennek deriváltja az értelmezési tartományának minden pontjában:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

tehát y az (ex) differenciálegyenletnek is megoldása, és ez kielégíti a kezdeti feltételt.

Unicitás. Tegyük fel, hogy létezik megoldása a kezdeti érték feladatnak. Legyen egy tetszőleges megoldása y , azaz

$$y'(x) = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

Ez az egyenlet a $\text{grad } F = (P, Q)$ miatt eláll

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

alakban. Most belátjuk, hogy y (impl)-nek implicit megoldása. Az összetett függvény differenciálási szabálya miatt $(d(F \circ G)(x, y) = dF(G(x, y)) \circ dG(x, y))$ az előző egyenlet a következő formában is írható:

$$(F(x, y(x)))' = [\text{grad } F|_{(x, y(x))}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y'(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(x, y(x))} + y' \frac{\partial F}{\partial y}|_{(x, y(x))} \equiv 0$$

x értékei egy intervallumból kerülnek ki, ezért az *integrálszámítás alaptétele* szerint az $x \mapsto F(x, y(x))$ egy konstans függvény. De a feltétel szerint $y(x_0) = y_0$ teljesül, ezért $x \mapsto y(x)$ egy (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ egyenletnek. Ez az utóbbi azonban egyértelműen van meghatározva, ezért a kezdeti érték feladat minden megoldása egybeesik ezzel az implicit függvénnyel, azaz a megoldás egyértelmű.

2) Az implicitfüggvény tételében adott egyetlen implicit függvény az 1) egzisztencia része miatt megoldása (ex)-nek és 1) unicitás része miatt ez az egyetlen megoldása (ex)-nek.

Az egzaktság jellemzése

Megjegyzés. Az egzakt differenciálegyenletet még

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \text{ ill. } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

alakban is szokás írni.

Ez utóbbi egyenletről azt is mondják, hogy akkor egzakt, ha a $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ kifejezés

"http://wiki.math.bme.hu/teljes_differenciál" <http://wiki.math.bme.hu>, amin azt értik, hogy létezik olyan $F(x,y)$ függvény, melynek teljes differenciálja:

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Ezt a mai jelölésekkel a következőképpen írjuk. Egy F kétváltozós függvény teljes differenciálja egy lineáris leképezés, mely a sztenderd $\{(1,0), (0,1)\}$ bázisban felírt koordinátáival nem más, mint a parciális deriváltjainak sormátrixa:

$$[dF(x, y)] = \text{grad } F(x, y) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right]$$

Emiatt a (C) feltétel a következő alakban is írható:

$$[dF] = [P, Q] \text{ ill. } \text{grad } F = [P, Q]$$

Tehát az egzakt egyenletben a (P, Q) vektormező (vektorértékű függvény) **potenciális**. Innen hasznos jellemzést kapunk az egzaktságra a vektoranalízisbeli ismereteinkből.

Tétel. Legyen U egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények (Q sehol sem nulla). A $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet pontosan akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Az F függvényt, az $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet integráljának nevezzük.

Ezt a tételt jól ismerjük és a bizonyítását a vektoranalízisben vettük.

Megjegyzés. 1) A feltétel nem más, mint az, hogy a (P, Q) síkbeli vektormező rotációja azonosan nulla. Ugyanis a rotáció a síkbeli (P, Q) vektormező esetén:

$$\text{rot}(P, Q) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

2) Bár a szeparábilis egyenlet egzakt, a fenti feltétel az egzaktság ellenőrzésére sokkal szigorúbb mint a szeparábilis egyenlet megoldhatóságának feltétele.

Lineáris differenciálegyenletek

Inhomogén lineáris egyenlet megoldásai

Tétel. Ha V, W tetszőleges lineáris tér, $A \in \text{Lin}(V, W)$ lineáris operátor, $b \in W$. Ha $x_0 \in V$ megoldása az $Ax = b$ inhomogén egyenletnek, akkor az

$$\mathbf{A}x = b$$

összes megoldásainak halmaza:

$$M = \{x + x_0 \in V \mid x \in \text{Ker}(\mathbf{A})\}$$

Bizonyítás. 1) Ha $x \in \text{Ker}(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{A}x = 0$. Ekkor

$$\mathbf{A}(x + x_0) = \mathbf{A}x + \mathbf{A}x_0 = 0 + b = b$$

azaz ekkor $x + x_0 \in M$.

2) Ha

$$\mathbf{A}(x + x_0) = b \text{ és } \mathbf{A}x_0 = b$$

akkor

$$\mathbf{A}x = \mathbf{A}(x + x_0 - x_0) = \mathbf{A}(x + x_0) - \mathbf{A}x_0 = b - b = 0$$

tehát $x \in \text{Ker}(\mathbf{A})$. QED.

Megjegyzés. Tudjuk tehát *akármilyen* lineáris térben az inhomogén egyenlet összes megoldását, ha ismert egy megoldása. Ha tehát $\mathbf{A}x=b$ lineáris differenciálegyenlet, akkor a tétel azt a szlogent fejezi ki, hogy *inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egyenl? a homogén egyenlet általános megoldása plusz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.*

Els?rend? inh. lin. diff. egyenlet és az állandó variálása

Állítás. Ha $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvény akkor az

$$\mathbf{A}y = y' + f \cdot y \quad (y \in C^1(I))$$

lineáris operátor a $\text{Lin}(C^1(I), C(I))$ téren.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= (\lambda y_1 + \mu y_2)' + f \cdot (\lambda y_1 + \mu y_2) = \\ &= \lambda y_1' + \mu y_2' + \lambda f \cdot y_1 + \mu f \cdot y_2 = \lambda \mathbf{A}(y_1) + \mu \mathbf{A}(y_2) \end{aligned}$$

Következmény. A fenti jelölésekkel, tetsz?leges g folytonos függvényre, ha y_0 a

$$y' + f \cdot y + g = 0 \quad (? = y \in C^1(I))$$

differenciálegyenlet egy megoldása, akkor az egyenlet általános megoldása egyenl? a

$$y' + f \cdot y = 0 \quad (? = y \in C^1(I))$$

homogén egyenlet általános megoldása plusz y_0 .

Példa. Oldjuk meg az

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(x^2)$$

egyenletet! A partikuláris megoldást keressük az állandók variálása módszerével!

Másodrend?, áll. ehós hom. egyenlet

Tétel. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az

$$Ay = y'' + ay' + by \quad (y \in C^2(I))$$

$C^2(I) \rightarrow C(I)$ lineáris operátor maga kétdimenziós.

Megoldás. A bizonyítás két részből fog állni. Először is Laplace-transzformációval belátjuk, hogy ha $\dim \text{Ker}(A)$ legalább kettő, akkor legfeljebb 2. Másodszor pedig mutatunk 2 lineárisan független megoldást.

Bizonyítás nélkül elfogadjuk azt a tényt, hogy ha ezen egyenlet esetén egy adott pontban kezdeti értéket adunk az y -nak és az y' -nek akkor a megoldás (ha van) egyértelmű. Szemléletes képpel, ez azt jelenti, hogy ha a kezdőfázist és a sebességet megadjuk, akkor azzal a teljes hullámformát megkapjuk.

I. Legyen y_1 és y_2 két lineárisan független megoldása az

$$Ay = 0$$

egyenletnek és legyen $y \in \text{Ker}(A)$ tetszőleges. Rögzítsünk egy $x_0 \in I$ helyet, melyen $y(x_0) = u$ és $y'(x_0) = v$. Elő fogjuk állítani ezt a partikuláris megoldást a két előbbi megoldás lineáris kombinációjaként. Legyenek:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= u_1, & y_1'(x_0) &= v_1 \\ y_2(x_0) &= u_2, & y_2'(x_0) &= v_2 \end{aligned}$$

azt kívánjuk elérni, hogy az

$$\begin{aligned} u_1 y_1 + u_2 y_2 &= u \\ v_1 y_1 + v_2 y_2 &= v \end{aligned}$$

egyenletrendszernek legyen egyértelmű megoldása (y_1, y_2) -ra. Ez pontosan akkor van, ha a

$$W^A(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

determináns (azaz az egyenletrendszer x_0 -beli Wronsky-determinánsa) nem nulla. Hiszen ekkor a megoldás egyértelműsége miatt (azaz, hogy u és v egyértelműen meghatározza y -t) azt kapjuk, hogy (y_1, y_2) "http://wiki.math.bme.hu/globális konstansok is" http://wiki.math.bme.hu, azaz $y_1 + y_2 = y$.

Az egyenlet Laplace-transzformáltja:

$$\begin{aligned} s^2 Y - s u_0 - v_0 + a(sY - u_0) + bY &= 0 \\ Y_1(s^2 + as + b) - s u_1 - v_1 - a u_1 &= 0 \quad / \cdot v_2 \end{aligned}$$

$$Y_2(s^2 + as + b) - su_2 - v_2 - au_2 = 0 \quad / \cdot v_1$$

$$(s^2 + as + b)(v_2Y_1 - v_1Y_2) + (s + a)(u_2v_1 - u_1v_2) = 0$$

Ennek az egyenletnek minden s -re fenn kell állnia, ezért ha $u_2v_1 - u_1v_2 = 0$ lenne, akkor $v_2Y_1 - v_1Y_2 = 0$ is lenne (minden s -re), azaz Y_2 és Y_1 lineárisan kifejezhetők lennének egymással, ami ellentmondana a rájuk tett kezdeti feltevésnek.

II. A megoldéskeresési feladatot kicsit bővebb körben, a valós változós, komplex értékű kétszer folytonosan $\mathbf{R}$ -differentiálható függvények körében oldjuk meg. Tehát ekkor $\mathbf{A}$ a $C^2(I, \mathbf{C})$ térbeli a $C(I, \mathbf{C})$ térbe hat. Ezek között fogunk valós megoldás keresni. A differenciáloperátornak sajátfüggvénye az exponenciális függvény, így tetszőleges $\mathbf{C}$

$$y(x) = e^{x\lambda} \in \mathbf{C} \quad (x \in \mathbf{R})$$

próbafüggvény behelyettesítésével kapjuk:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Tehát a megoldások:

1. ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valósak, akkor

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

bázis, mert lineárisan függetlenek és éppen ezért I. miatt elállítják $\text{Ker}(\mathbf{A})$ -t:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \mid C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$$

2. ha $\lambda_1 = \lambda_2$ valósak, akkor keresnünk kell még egy az $e^{x\lambda}$ -től lineárisan független megoldást.

$$y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

Világos, hogy ez az, hiszen a $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \equiv 0$ egyenletet $e^{x\lambda}$ -vel leosztva, a polinom baloldalú $C_1 + C_2 x \equiv 0$ adódna, ami csak akkor lehet a nullapolinom, ha az ehők mind nullák.

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \mid C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$$

3. ha $\lambda = \alpha \pm i\beta$ i nemvalós, akkor

$$f_1(x) = e^{x(\alpha+i\beta)}, \quad f_2(x) = e^{x(\alpha-i\beta)}$$

azaz

$$f_1(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)), \quad f_2(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$$

megoldások, melyek azonban komplexek. De ezeket összeadva, illetve a különbségüket i -vel beszorozva már valós megoldásokat kapunk (ezek az előbbi végzett műveletek lineárisak voltak, így a függvények megoldás mivoltán nem változtattak). Azaz:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta)$$

a tér pedig:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta) \mid C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$$

bázis, mert lineárisan függetlenek és éppen ezért I. miatt el?állítják $\text{Ker}(\mathbf{A})$ -t.

A deriválttenzor invariánsai

Tudjuk, hogy ha $\mathbf{v}$ differenciálható vektorfüggvény, akkor az $\mathbf{r}_0$ pontbeli differenciálján, vagy deriváltján, vagy deriválttenzorán azt az egyértelm?en létező $\mathbf{A}$ lineáris leképezést értjük, melyre:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \mathbf{0}$$

Míthogy az $\mathbf{A}$ deriválttenzor maga is tenzor, ezért érdemes külön elnevezni az invariánsait ($\mathbf{h}$ tetszőleges vektora a térnek):

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{A}_s \mathbf{h} + \frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{h}$$

azaz $\mathbf{A}$ vektorinvariánsának duplája a rotáció. A divergencia a skalárinvariáns:

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{Sp}(\mathbf{A})$$

Világos, hogy ebből úgy lesznek a parciális deriváltakkal definiált alakok, ha az $\mathbf{A}$ sztemerd bázisbeli mátrixát, azaz a J Jacobi mátrixot írjuk fel. Ekkor mindkét említett differenciáloperátort a szokásos alakjában kapjuk:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. A f?tengelytételből következik, hogy hogyan jellemezhet? az az eset, amikor az $\mathbf{A}$ deriválttenzor f?tengelyre transzformálható. Ez pontosan akkor van, amikor $\text{rot}(\mathbf{v})=0$.

Potenciál

A továbbiakban feltesszük, hogy a $\mathbf{v}$ vektorfüggvény **folytonosan differenciálható**.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektorfüggvény **potenciálos**, ha van olyan u skalárfüggvény, mely differenciálható és

$$\text{grad } u = \mathbf{v}$$

A $\mathbf{v}$ vektorfüggvény **cirkulációja** a egyszer? zárt görbén a

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

vonaltintegrál.

Jellemzés

A potenciálosság rendkívül szoros kapcsolatban van a cirkulációval és a rotációval:

Tétel. Ha $\mathbf{v}$ folyt. diff. vektormez? az A egyszeresen összefügg? tartományon. Ekkor az alábbi három kijelentés egymással egyenérték? ($\mathbf{v}$ folyt. diff. vektormez?):

1. $\mathbf{v}$ potenciális,
2. $\mathbf{v}$ rotációja minden pontban nulla,
3. $\mathbf{v}$ cirkulációja minden zárt görbére nulla (más kifejezéssel: $\mathbf{v}$ konzervatív).

Bizonyítás.

1. --> 2. Tegyük fel, hogy $\text{grad } u = \mathbf{v}$, így $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } u$. Ekkor formálisan hivatkozhatunk például a vektoriális szorzás azon szabályára, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata 0, hisz

$$\text{rot}(\text{grad } u) = \nabla \times \nabla u$$

De itt végül is a Young-tétel?l van szó. Komponensenként kiírva:

$$\nabla \times \nabla u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{vmatrix} u = \mathbf{i}(\partial_2 \partial_3 u - \partial_3 \partial_2 u) + \dots$$

kétszer folytonosan differenciálható u Hesse-mátrixa szimmertikus, azaz a vegyes másodrend? parciális deriváltak egyenl?k, azaz a fenti összeg 0.

2. --> 3. Itt a Stokes-tételre kell hivatkoznunk:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_F \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

egyszeresen összefügg? tartományban haladó $\Gamma = \partial F$ görbére és tetsz?leges olyan F felületre, melynek Γ a pereme. De $\text{rot } \mathbf{v}$ mindenhol 0. így a jobb oldal 0, azaz cirkuláció is.

3. --> 1. Belátjuk, hogy van potenciál. Legyen $\mathbf{a}$ rögzített pont és $\mathbf{b}$ tetsz?legesen választott. Legyen Γ_1 és Γ_2 két tetsz?leges görbe, mely $\mathbf{a}$ -ból $\mathbf{b}$ -be megy. Ekkor az egyszeres összefügg?ség miatt a Γ_2 -t visszfelé irányítva:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$$

az a zárt görbe, mely az $\mathbf{a}$ -ból megy a Γ_1 mentén a $\mathbf{b}$ -be és a $\mathbf{b}$ -ból megy a Γ_2 mentén, de ellenkez?leg irányítva az $\mathbf{a}$ -ba. De $\mathbf{v}$ minden körintegrálj elt?nik, így

$$0 = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} + \int_{-\Gamma_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

azaz

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

Tehát az

$$u(x) = \int_{(\gamma) a}^x \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

skalárfüggvény független az úttól és a felső határ szerinti gradiense ugyanúgy az integrandus, mint az egyváltozós valós függvények esetén. QED.

Gradiensre vonatkozó integráltétel

Az előbb említett, az integrálfüggvény deriválhatóságának tételének megvan a párja is. Ez az *első gradiens-tétel*, mely végül is nem más, mint a Newton--Leibniz-formula többdimenziós általánosításai közül a legelső verzió:

Tétel.

$$u(b) - u(a) = \int_{(\Gamma) a}^b \text{grad}(u) \, d\mathbf{r}$$

(ha u folyt. diff. és egysz. öf. tartományon ért.)

A tétel beleillik a "<http://wiki.math.bme.hu> magyar integrálátalakító tételek" "<http://wiki.math.bme.hu> sorába (Stokes-tétel, Gauss--Osztrogradszkij-tétel és most az I. gradiens-tétel), melyek alapszlogenje, hogy "<http://wiki.math.bme.hu> integrál a peremen = a derivált integrálja belül" "<http://wiki.math.bme.hu>, persze itt a perem az $\{a,b\}$ véges halmaz, a derivált a gradiens, a "<http://wiki.math.bme.hu> belül" "<http://wiki.math.bme.hu> pedig a görbe. (S.-t-nél felület a belső, a határán futó zárt görbe a perem és rot a derivált, G--O-t-nél térrész a belső, az ∂ -t határoló zárt felület a perem és div a derivált).

Potenciálkeresés. 1) Pancsolásos módszer és variánsai (alkalmazások: egzakt differenciálegyenlet megoldása, harmonikus társ keresése) 2) integrálás és az I. grad. tétel alkalmazása 3) invariáns alakban adott feladatoknál primitívfüggvény keresés.

Hossz n-edik deriváltja

Ez utóbbi megoldáshoz tudnunk kell, hogy a hossz n-edik deriváltja mi. Ezt a többváltozós függvények analízisében az összetett függvény deriválásánál tanultuk: ha $\mathbf{r}$ nem nulla, akkor

$$\text{grad}|\mathbf{r}|^n = n|\mathbf{r}|^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

mert a küls? függvény: $t \mapsto t^n$, a bels? pedig $\mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}|$. Az utóbbi deriváltja koordinátás alakban:

$$\text{grad} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = \left(\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}}, \dots, \frac{2x_m}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}} \right) = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}}$$

tehát a függvénykompozíció deriválására vonatkozó tétel szerint:

$$\text{grad}(f(\Phi(\mathbf{r}))) = f'(\Phi(\mathbf{r})) \cdot \text{grad}\Phi(\mathbf{r}) = n|\mathbf{r}|^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Felületi integrál, Gauss-tétel

Definíció. Legyen $\mathbf{v}$ vektormez?, mely $\mathbf{R}^3$ egy nyílt D tartományán értelmezett. Legyen $\mathbf{r} : T \rightarrow D$, $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ folytonosan differenciálható függvény, melynek értelmezési tartománya a T mérhet? síktartomány. Ekkor a vektorfüggvény integrálját és létezését a felület mentén a következ? limesszel definiáljuk:

$$\exists \int_{\text{Ran}(\mathbf{r})} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = L \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \Delta \mathbf{F}_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\mathbf{r}_i \in F \\ |\Delta \mathbf{F}_i| \rightarrow 0}} L \in \mathbf{R}$$

Itt tehát T -t egymásba nem nyúló, mérhet? I_i síktartományokra bontjuk fel, amelyek ármér?je egyre csökken. Az integrál létezésére és értékére az alábbi egyszer? kritériumot és tartományi integrált írhatjuk föl. Legyen $\mathbf{r} : T \rightarrow D$, $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ folytonosan differenciálható függvény, melynek értelmezési tartománya a T mérhet? síktartomány. Ekkor az $\mathbf{r}(u, v)$ deriváltjai léteznek, a felületi integrál létezik és felírható

$$\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \int_{T_{u,v}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \, du \, dv$$

Ha a skaláris szorzat **invariáns** értelmezését vesszük, akkor a fenti formulát még a következ?képpen is felírhatjuk:

$$\int_G \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_G v_{\perp} \, |d\mathbf{f}|$$

$$v_{\perp} = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

ahol $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$, azaz a felületi integrál egyenl? a vektormez?nek a felületi érint?sík normálisa irányába es? el?jeles komponense ugyanazon felületre vonatkozó felszín szerinti integráljával.

Megjegyzend?, hogy a képletben szerepl? vegyes szorzat értéke 3×3 -as determinánsként számítható ki a komponenseib?l:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} = \begin{vmatrix} [\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v))] \\ \left[\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \right] \\ \left[\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right] \end{vmatrix}$$

Tétel -- Gauss-Osztrogradszkij -- Legyen $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormez?, $D \subseteq \mathbf{R}^3$ tartomány és legyen V a D -ben lév? mérhet? térrész, melynek pereme az $\partial V = F \subseteq D$ zárt felület a térrészbe?l kifelé mutató irányítással. Ekkor

$$\oint_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV$$

A tétel fontos alkalmazása a gömbszimmetrikus vektormez?k felületi integráljának kiszámítása, ezek közül is a legfontosabb a reciprok négyzetes er?sség? vektormez?k.

A ponttöltés keltette elektromos mez? divergenciája, fluxusa

Számítsuk ki a

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

vektormez? integrálját a *tetsz?leges* zárt felületre, mely az origót belsejében tartalmazó V kompakt tartomány pereme, kifelé irányítva!

El?szer kiszámítjuk a vektormez? divergenciáját ott, ahol értelmezve van:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\mathbf{r} |\mathbf{r}|^{-3}) = 3 |\mathbf{r}|^{-3} + \mathbf{r}(-3) |\mathbf{r}|^{-4} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 0$$

Itt felhasználtuk a divergenciára vonatkozó szorzási szabályt.

Az integrál el?állítható egy a $\mathbf{v}$ értelmezési tartományába es? tartomány peremére és egy másik felületre vonatkozó felületi integrálként. Legyen ugyanis G az origó középpontú olyan R sugarú gömb, mely benne van V belsejében és D az a tartomány pedig legyen V minusz G . Ekkor

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} + \int_{-\partial G} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

azaz

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} + \int_{\partial G} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_D \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV + \int_{\partial G} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Tehát csak G határára kell kiszámítani a vektormez? fluxusát. Ezt az invariáns formulával tesszük:

$$\int_{\partial G} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial G} \frac{1}{R^2} |\mathbf{df}| = \frac{1}{R^2} \int_{\partial G} |\mathbf{df}| = 4\pi$$

(Imént lényegében az elektrosztatikus Gauss-törvény állítását vezettük le a Coulomb-törvényb?l)

Vonalintegrál, Stokes-tétel

Legyen $\mathbf{v}$ vektormez?, mely $\mathbf{R}^n$ egy nyílt D tartományán értelmezett. Legyen

$\Gamma : [a, b] \rightarrow D, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t)$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a vektormez? integrálját és létezését a görbe mentén a következ? limesszel definiáljuk:

$$\begin{aligned} \exists \int_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = L & \iff \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(\mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L \in \mathbf{R} \\ & \begin{aligned} & \mathbf{r}_i \in \Gamma \\ & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| \rightarrow 0 \\ & \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) \\ & (t_i)_{i=1 \dots n} \text{ szig. mon. nov.} \end{aligned} \end{aligned}$$

Az integrál létezésére és értékére az alábbi egy egyszer? kritériumot és egydimenziós integrált írhatjuk föl.

Legyen $G : [t_1, t_2] \rightarrow D, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t)$ legfeljebb véges sok pontban nem folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az $\mathbf{r}(t)$ deriváltja véges sok pont kivételével létezik, a vonalintegrál létezik és felírható

$$\int_G \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt$$

Ha a skaláris szorzat invariáns értelmezését vesszük, akkor a fenti formulát még a következ?képpen is felírhatjuk:

$$\int_G \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} v_{||}(\mathbf{r}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt = \int_G v_{||} |\mathbf{dr}|$$

ahol $v_{||} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$, azaz a vektormez?nek a görbe érint?je irányába es? el?jeles vetülete.

Tétel -- Stokes-tétel -- Legyen $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormez?, $D \subseteq \mathbf{R}^3$ tartomány és legyen $F \subseteq D$ irányított, peremes felület, ennek pereme ∂F . Ekkor

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{F}$$

Megjegyezzük, hogy a perem irányítása kompatibilis kell hogy legyen a felület irányításával, ellenkez? esetben az integrál a fenti ellentettje lesz. Kompatibilis a felület és a pereme irányítása, ha "http://wiki.math.bme.hua felületi normálvektor irány a fejünk iránya, a lábunk a felületen van, a peremen haladunk végig és a felület bal kéz fel?l esik (jobbkezsabály)"http://wiki.math.bme.hu.

Végtelen hosszú egyenes vezet? keltette mágneses mez? rotációja és cirkulációja

A tétel alkalmazására a következ? hengersizmetrikus esetet nézzük.

Legyen

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^2}$$

a vektormez? és a felület az [xy] sík egy olyan *tetsz?leges* T mérhet? tartománya, mely a belsejében tartalmazza az origót és a pereme a G zárt görbe. Igazoljuk ekkor, hogy G-re az integrál 2 .

El?ször kiszámítjuk a vektormez? rotációját. Ehhez felhasználjuk a rotációra vonatkozókövetkez? azonosságot:

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{u}) = \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \Phi + \text{grad} \Phi \times \mathbf{u}$$

$$\text{rot} \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot |\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^{-2} + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \text{grad}(|\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^{-2})$$

A rotáció a deriválttenzor vektorinvariánsának kétszerese, mivel lineáris leképezés deriváltja saját maga, ezért a képletbeli rotáció $2\mathbf{k}$. A képletbeli gradiens alatti skalárméz? a tengelyt?l mért távolságt?l függ, ezért:

$$\text{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{k}|\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^{-2} + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times (-2)|\mathbf{k} \times \mathbf{r}|^{-3} \cdot \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{r}|} = \mathbf{0}$$

Most felbontjuk a T tartományt egy D lyukas tartományra és egy körlapra. A K körlap sugara legyen olyan R, mely esetén a körlap a T belsejében van benne. Ekkor

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\partial T} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} + \int_{-\partial K} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

Tehát

$$\int_{\partial T} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} + \int_{\partial K} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_D \text{rot}(\mathbf{v}) \, df + \int_{\partial K} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\partial K} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

Innen a vonalintegrál invariáns értelmezése folytán:

$$\int_{\partial K} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{\partial K} \frac{1}{R} |\mathbf{dr}| = \frac{1}{R} 2\pi R = 2\pi$$

(Itt lényegében a végtelen hosszú egyenes vezet? körüli görbén a mágneses indukció körintegrálját határoztuk meg.)

CROSS és alkalmazása és a Green-tétel

Definíció. A kett? vagy háromdimenziós térben CROSS a következ? lineáris ill. bilineáris leképezés:

$$\text{Ha } \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2, \text{ akkor } \text{cross}(\mathbf{v}) = (-v_2, v_1).$$

$$\text{Ha } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3, \text{ akkor } \text{cross}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Leképezések invariánsai

Az **S** lineáris leképezés **szimmetrikus**, ha minden ortonormált bázisban a mátrixa szimmetrikus mátrix. Igaz az, hogy **S** pontosan akkor szimmetrikus, ha minden **u, v** vektorra

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{u}),$$

ahol $\cdot$ a skaláris szorzás.

Az **A** lineáris leképezés **antiszimmetrikus**, ha minden ortonormált bázisban a mátrixa antiszimmetrikus mátrix. Igaz az, hogy **A** pontosan akkor antiszimmetrikus, ha minden **u, v** vektorra

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}),$$

ahol $\cdot$ a skaláris szorzás.

Bármely **T** lineáris leképezés egyértelm?en el?áll **S + A** alakban, ahol **S** szimmetrikus, **A** pedig antiszimmetrikus, és pedig:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$$

Két fontos tétel:

Tétel -- Ha **A** $\mathbf{R}^3$ (illetve $\mathbf{R}^2$) antiszimmetrikus, akkor létezik olyan **a** vektor (vagy *a* skalár), hogy minden **v** vektorra:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \text{cross}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \quad (\text{vagy } \mathbf{A}\mathbf{v} = a \cdot \text{cross}(\mathbf{v}))$$

a-t (ill. *a*-t) az **A** **vektorinvariánsának** nevezzük (bár a síkon ez skalár). A tételt elég a sztenderd bázisban igazolni, ott az $\mathbf{a} \times (\cdot)$ operátorral, azonos így **A** ez az operátor.

F?tengelyétel -- Ha **S** $\mathbf{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós és létezik a sajátvektorokból álló **B** ortonormált bázis, amiben **S** f?tengelyre transzformálható, azaz diagonális és az elemei az **S** sajátértékei:

$$[\mathbf{S}]_{\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ez nehéz, de fontos tétel.

A deriválttenzor invariánsai

Tudjuk, hogy ha $\mathbf{v}$ differenciálható vektorfüggvény, akkor az $\mathbf{r}_0$ pontbeli differenciálján, vagy deriváltján, vagy deriválttenzorán azt az egyértelműen létező $\mathbf{A}$ lineáris leképezést értjük, melyre:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \mathbf{0}$$

Minthogy az $\mathbf{A}$ deriválttenzor lineáris leképezés, ezért érdemes külön elnevezni az invariánsait ($\mathbf{h}$ tetszőleges vektora a térnek):

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{A}_s\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{rot}(\mathbf{v})\Big|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{h}$$

azaz $\mathbf{A}$ vektorinvariánsának duplája a rotáció. $\mathbf{A}_s$ a derivált leképezés szimmetrikus része. A divergencia a skalárinvariáns:

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{Tr}(\mathbf{A})$$

Világos, hogy ebből úgy lesznek a parciális deriváltakkal definiált alakok, ha az $\mathbf{A}$ sztenderd bázisbeli mátrixát, azaz a $\mathbf{J}$ Jacobi mátrixot írjuk fel. Ekkor mindkét említett differenciáloperátort a szokásos alakjában kapjuk:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Integrálok kiszámítási formulái

Felszín szerinti intergálok:

$$\int_F \varphi |df| = \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(r(t)) |\mathbf{cross}(\dot{r}(t))| dt$$

Síkban:

$$\int_F \varphi |df| = \int_{(u,v) \in T} \varphi(r(u,v)) |\mathbf{cross}(r_u(u,v), r_v(u,v))| du dv$$

Térben:

Felületmenti intergálok:

$$\int_F v df = \int_{t=t_1}^{t_2} v(r(t)) \mathbf{cross}(\dot{r}(t)) dt$$

Síkban:

$$\int_F v df = \int_{(u,v) \in T} v(r(u,v)) \text{cross}(r_u(u,v), r_v(u,v)) du dv$$

Térben:

Síkban a felületi és felszín integrál kifejezhető az ívhossz és a vonalintegrállal, a következőképpen. Mivel $|\text{cross}(a)| = |a|$, ezért

$$\int_F \varphi |df| = \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(r(t)) |\text{cross}(\dot{r}(t))| dt = \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(r(t)) |\dot{r}(t)| dt = \int_L \varphi |dr|$$

ahol L és F paraméterezése $t \mapsto r(t)$ ugyanaz.

Felületi integrál esetén, ha F egy T tartomány peremdarabja, akkor

$$\int_F v df = \int_{-F} \text{cross}(v) dr$$

ugyanis felhasználva, hogy $\text{cross}(dx, dy) = (-dy, dx)$ és $\text{cross}(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

$$\begin{aligned} \int_F v df &= \int_F v_1(-dy) + v_2 dx = \int_F v_2 dx - v_1 dy = \int_F -(-v_2 dx + v_1 dy) = - \int_F -v_2 dx + v_1 dy \\ &= \int_{-F} -v_2 dx + v_1 dy = \int_{-F} \text{cross}(v) dr \end{aligned}$$

Itt -F, mint vonal a T tartomány peremének egy darabja, amint pozitívan van irányítva (ha tudjuk, hogy F kifelé irányított)

Green-tétel

Legyen a (P,Q) síkbeli vektormező egy U nyílt halmazon folytonosan differenciálható és legyen T az U egy kompakt mérhető része, ∂T a peremét alkotó görbe. Ekkor

$$\oint_{\partial T} P dx + Q dy = \int_T \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Ezt a tételt egy speciális T háromszöglapra bizonyítjuk. Legyen

$$T := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Az így definiált T az x tengelyre vonatkozóan normált tartomány. A bizonyításban szükség lesz arra, hogy T-t y tengelyre vonatkozó normált tartományként is megadjuk:

$$T := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 - y\}$$

Határa:

$$\partial T = [(0, 0), (1, 0)] \cup [(1, 0), (0, 1)] \cup [(0, 1), (0, 0)]$$

A vonaldarabok paraméterezése legyen rendre: $(t, 0)$, ha $t \in [0, 1]$, $(t, 1-t)$, ha $t \in [0, 1]$ (ennek az irányítását majd meg kell fordítani) és $(0, t)$, $t \in [0, 1]$ (ennek is meg kell fordítani). Ekkor

$$\begin{aligned} \oint_{\partial T} P dx + Q dy &= \int_0^1 P(t, 0) dt - \int_0^1 P(t, 1-t) - Q(t, 1-t) dt - \int_0^1 Q(0, t) dt = \\ &= \int_0^1 P(t, 0) - P(t, 1-t) dt + \int_0^1 Q(1-t, t) - Q(0, t) dt = \int_0^1 P(x, 0) - P(x, 1-x) dx + \int_0^1 Q(1-x, x) - Q(0, x) dx \end{aligned}$$

Itt végeztünk egy paramétercserét.

$$= \int_0^1 Q(1-y, y) - Q(0, y) dy - \int_0^1 P(x, 1-x) - P(x, 0) dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy - \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx$$

Ezután pedig felhasználjuk, hogy a két integrál ugyanarra a tartományra vett kettősintegrál:

$$\int_T \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \int_T \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

A tétel érvényes minden n -szeresen összefüggő tartományra is (az $n-1$ db lyukat tartalmazó kilyukasztott körlappal homeomorf tartományokra), mert egyfelől változatlan marad, ha görbevonalú háromszögre térünk át (integráltranszformációval), másfelől minden n -szeresen összefüggő tartomány felbontható véges sok görbevonalú háromszögre, ahol az integrálok összegében a belső szakaszok eltűnnek és a tétel szintén érvényben marad.

A Green-tétel a (háromdimenziós) Stokes-tétel speciális esete, hiszen a $(P, Q, 0)$ vektormező rotációja pont $(0, 0, \partial_x Q - \partial_y P)$. A Green-tételből levezethető a kétdimenziós Gauss-tétel, a következőképpen. Legyen T a síkbeli peremes tartomány és ∂T a pereme mint pozitívan irányított zárt görbe (ill. véges sok görbe diszjunkt uniója, ha n -szeresen összefüggő, $n > 1$). Ekkor a $Q = P$, $P = -Q$ szereposztással felírva a Green-tételt:

$$\oint_{\partial T} -Q dx + P dy = \int_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

Itt a baloldali integrandus a (P, Q) vektormező cross-ja, ami viszont a ∂T -re, mint valódi felületre vett integrál ellenkezője:

$$\int_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial T} -Q dx + P dy = \oint_{\partial T} \text{cross}(P, Q) dr = \oint_{-\partial T} (P, Q) df$$

ahol persze $\partial_x P + \partial_y Q = \text{div}(P, Q)$ és a $-\partial T$ valódi felület a tartományból kifelé van irányítva.