

Tükrözés síkra

Példa. Tekintsük az $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$ síkot. Adjuk meg az S síkra történő tükrözés mátrixát, a sajátvektorait és a sajáttereket, illetve a sajátkoordináta-rendszert!

A síkra tükrözés hozzárendelési utasítása:

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} - \frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$$

ahol $\mathbf{n}$ a sík normálvektora, itt $(1, -1, 1)$. A bázisok képei:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A mátrix:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ez -1 determinánsú szimmetrikus mátrix, ortonormált vektorokból álló sajátrendszerrel,

Young-tétel

Tétel (Gyenge Young-tétel) $U \subset \mathbb{R}^2, f: U \rightarrow \mathbb{R}$,

$f \in C(U)$ és $f^{(n)}$ egyenletesen korlátos

akkor

$$\partial_{21} f = \partial_{12} f$$

Bizonyítás. $\mathbf{a}=(u,v)$, $(x,y)=(u+h,v+k) \in U$, $A_1 = \partial_1 f(\mathbf{a})$, $A_2 = \partial_2 f(\mathbf{a})$, $A_{ij} = \partial_{ij} f(\mathbf{a})$.

$$\begin{aligned} f(u+h, v+k) &= f(u, v) + A_1 h + A_2 k + \\ &+ A_{11} h^2 + A_{12} h k + A_{21} k h + A_{22} k^2 + r_3(h, k) \end{aligned}$$

ahol

$$r_3(h, k) = \sum_{i=0}^3 \varepsilon_i(h, k) \cdot h^i k^{3-i}$$

harmadrend?en kicsiny, de differenciálható tagok. Ekkor

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y) &= \frac{\partial f(h, k)}{\partial h} = A_1 + 2A_{11}h + A_{12}k + A_{21}k + \frac{\partial r_3(h, k)}{\partial h} \\ \partial_{21} f(x, y) &= \frac{\partial^2 f(h, k)}{\partial k \partial h} = A_{12} + A_{21} + \frac{\partial^2 r_3(h, k)}{\partial k \partial h}\end{aligned}$$

ez a $(h, k) = (0, 0)$ -ban:

$$\partial_{21} f(u, v) = A_{12} + A_{21}$$

mert a harmadrend?en kicsiny tagok a $(h, k) = (0, 0)$ -ban elt?nnek. Ugyanígy:

$$\partial_{12} f(u, v) = A_{12} + A_{21}$$

így ezek is egyenl?k.

Gondolatkísérlet

$$f(u + h, v + k) = f(u, v) + A_1 h + A_2 k + \varepsilon^{(1)}(h, k)h + \varepsilon^{(2)}(h, k)k$$

ha az ε -ok diff.-hatóak, akkor:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{(0,0)} = A_1 + \varepsilon_h^{(1)}(h, k)h + \varepsilon^{(1)}(h, k) + \varepsilon_h^{(2)}(h, k)k \Big|_{(0,0)} = A_1$$

ugyanígy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \left. \frac{\partial f}{\partial k} \right|_{(0,0)} = A_2$$

De ennél többet is mondhatunk. Ha az ε -okon kívül a parciális differenciálok és az epsilon másodernd? tagjának függvényegyütthatója is differenciálható, akkor:

$$\begin{aligned}f(u + h, v + k) &= f(u, v) + A_1 h + A_2 k + \\ &+ (A_{11}h + A_{21}k + \eta^{(11)}(h, k)h + \eta^{(21)}(h, k)k)h + \\ &+ (A_{21}h + A_{22}k + \eta^{(21)}(h, k)h + \eta^{(22)}(h, k)k)k = \\ &= f(u, v) + A_1 h + A_2 k + \\ &+ A_{11}h^2 + A_{21}kh + \eta^{(11)}(h, k)h^2 + \eta^{(21)}(h, k)kh + \\ &+ A_{21}hk + A_{22}k^2 + \eta^{(21)}(h, k)hk + \eta^{(22)}(h, k)k^2 =\end{aligned}$$

ha most mindegyik η deriválható, akkor:

$$\frac{\partial f(u+h, v+k)}{\partial h} = A_1 + 2A_{11}h + A_{21}k + \frac{\partial \eta^{(11)}(h, k)}{\partial h} h^2 + \eta^{(11)}(h, k) 2h + \frac{\partial \eta^{(21)}(h, k)}{\partial h} k + \eta^{(11)}(h, k) h + \eta^{(22)}(h, k) k^2 + A_{21}hk + A_{22}k^2 + \eta^{(21)}(h, k)hk + \eta^{(22)}(h, k)k^2 =$$